

## **Revista Matemática e Educação**

# UNI-FACEF CENTRO UNIVERSITÁRIO MUNICIPAL DE FRANCA

**José Alfredo de Pádua Guerra**  
*Reitor*

**Alfredo José Machado Neto**  
*Vice-Reitor*

**Melissa Franchini Cavalcante Bandos**  
*Pró-Reitor de Administração*

**Sheila Fernandes Pimenta e Oliveira**  
*Pró-reitora Acadêmica*

**Prof<sup>a</sup>. Ma. Flávia Haddad França**  
*Pró-Reitor de Extensão Comunitária e Desenvolvimento Comunitário*

**Silvio Carvalho Neto**  
*Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação e Coordenação de  
Pró-Graduação Lato Sensu*

**Paulo de Tarso Oliveira**  
*Coordenação de Pós-Graduação Stricto-Sensu*

**Cyro de Almeida Durigan**  
*Chefe de Departamento de Administração*

**Orivaldo Donzelli**  
*Chefe de Departamento de Ciências Contábeis*

**Ana Tereza Jacinto Teixeira**  
*Chefe de Departamento de Ciências Econômicas*

**Fúlvia Nassif Jorge Facuri**  
*Chefe de Departamento de Comunicação Social-  
Publicidade e Propaganda*

**Lívia Maria Lopes**  
*Chefe de Departamento de Enfermagem*

**Prof. Me. Anderson Fabrício Mendes**  
*Chefe do Departamento de Engenharia Civil*

**June Tabah**  
*Chefe do Departamento de Engenharia de Produção*

**Daniel Facciolo Pires**  
*Chefe do Departamento de Computação*

**Ana Lúcia Furquim Campos Toscano**  
*Chefe de Departamento de Letras*

**Silvia Regina Viel**  
*Chefe de Departamento de Matemática*

**Frederico Alonso Sabino de Freitas**  
*Chefe de Departamento de Medicina*

**Maria de Fatima Aveiro Colares**  
*Chefe do Departamento de Psicologia*

**UNI-FACEF CENTRO UNIVERSITÁRIO MUNICIPAL DE FRANCA**

**Revista Matemática e Educação**

**ISSN 2175-4667**

<b>Revista Matemática e Educação</b>	<b>Franca</b>	<b>v.1</b>	<b>n.9</b>	<b>p.9-119</b>	<b>2019</b>
--	---------------	------------	------------	----------------	-------------

**Revista Matemática e Educação**  
**Departamento de Matemática – Uni-FACEF**  
**Av. Ismael Alonso y Alonso 2400 – Bairro São José**  
**14401-135 – Franca – SP**  
**<http://www.facef.com.br>**

**Comissão Editorial e Editores Responsáveis**

**Antonio Carlos da Silva Filho**  
**Adriana Aparecida Silvestre Gera – Ribeiro**  
**Leticia Faleiros Chaves**  
**Lucinda M. de Fátima Rodrigues Coelho**  
**Silvia Regina Viel**

**O conteúdo apresentado nesta revista é de**  
**responsabilidade exclusiva de seus autores.**

**Capa**  
**Marcela Navarro de Faria**

Revista Matemática e Educação / Uni-FACEF Centro  
Universitário Municipal de Franca. v.1 , n.9 (2019). – Franca (SP):  
Uni-FACEF, 2019.

Publicação Anual

ISSN 2175-4667

1. Matemática 2. Educação – Matemática 3. Periódicos  
I – Uni-FACEF Centro Universitário Municipal de  
Franca

CDD 510

**Uni-FACEF – Centro Universitário Municipal de Franca**  
**ABEC - Associação Brasileira de Editores Científicos**

## PREFÁCIO

Fomentar a pesquisa, incentivar a cultura, ofertar educação de qualidade são ações que mudam o futuro de uma nação. Essas mudanças não são feitas de forma instantânea e podem começar a acontecer independentemente de questões governamentais. Mudanças que nasçam da mobilização e da conscientização dos indivíduos e instituições preocupadas com o bem estar social e com condições dignas de vida das pessoas.

Nesse caminho, o Departamento de Matemática do Centro Universitário Municipal de Franca – Uni-FACEF, como forma de contribuir, lança um novo volume da Revista Matemática & Educação, que tem como foco, além de incentivar o estudo da Matemática, apoiar as discussões sobre temas relevantes no que diz respeito à aplicação dessa ciência, e às implicações/relações que nascem do seu ensino-aprendizagem.

Com um grande cuidado com a formação do professor de Matemática, que atuará como disseminador da cultura matemática, dos conhecimentos que instrumentarão os alunos para que se tornem agentes críticos e de mudanças, buscamos um fazer pedagógico que acompanhe todos os avanços contemporâneos.

Assim, nossos professores trazem para este número da revista temas relevantes como: Matemática e Arte, trabalho inspirado nas obras de Escher; dois trabalhos sobre multifractalidade, um abordando o sistema de Lorenz e o outro o momento para o grau da multifractalidade; previsão do IPCA a partir do método de médias móveis; e, finalmente, dois trabalhos que versam sobre a diminuição do número de licenciaturas em Matemática no interior do Estado de São Paulo e sobre as políticas públicas de avaliação.

Vale ressaltar que o trabalho desenvolvido por nossos alunos durante o curso nascem de temas que, para eles, são instigantes, encontrando na pesquisa uma forma de ampliar seus horizontes.

Deixamos expresso também aqui nosso compromisso com uma educação de qualidade que promova a melhoria dos resultados em relação à Matemática, a consolidação das pesquisas e a convicção de que o país precisa, com sentido de urgência, de avanços importantes em relação às políticas docentes.

Cordialmente

Silvia Regina Viel  
Chefe do Departamento de Matemática  
Centro Universitário Municipal de Franca – Uni-FACEF



## SUMÁRIO

EVIDÊNCIAS DA MULTIFRACTALIDADE DO SISTEMA DE LORENZ USANDO O MÉTODO MFDFA.....	09
LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA OFERECIDAS NA MODALIDADE PRESENCIAL NA REGIÃO DE FRANCA - SP: UM BREVE LEVANTAMENTO.....	25
MATEMÁTICA E ARTE: ENSINO DE ISOMETRIAS POR MEIO DE TÉCNICAS DE ESCHER.....	40
POLÍTICAS PÚBLICAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NO ESTADO DE SÃO PAULO.....	77
PREVISÃO PARA O IPCA UTILIZANDO O MODELO DE MÉDIAS MÓVEIS.....	95
PROCURANDO OS VALORES ÓTIMOS DO MOMENTO QUE PARA O CÁLCULO DO GRAU DE MULTIFRACTALIDADE NO MÉTODO MFDFA.....	109



## EVIDÊNCIAS DA MULTIFRACTALIDADE DO SISTEMA DE LORENZ USANDO O MÉTODO MFDFA

Daiane Rodrigues Costa

Orientador: Prof. Dr. Antônio Carlos da Silva Filho

**Resumo:** O Sistema de Lorenz é reconhecidamente um objeto fractal. Neste trabalho, mostramos, usando o método Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) que ele é muito mais do que isto: é um sistema multifractal. O Sistema foi gerado a partir da solução das equações que o caracterizam, produzindo séries temporais para as suas três variáveis características e comparando os resultados com séries padrões da literatura: série de ruído branco, série monofractal e série multifractal.

**Palavras Chaves:** Sistema de Lorenz. Fractais. Multifractais. MFDFA.

### 1 Introdução

Os primeiros estudos sobre multifractais foram realizados pelo matemático polonês Benoît Mandelbrot. O termo “Fractal”, cunhado por ele, vem do adjetivo latim fractus, do verbo frangere, e significa quebrar. A ideia básica sobre fractais é que objetos e fenômenos complexos podem ser reduzidos, eventualmente, a unidades menores que, em si, reproduzem o objeto como um todo [MANDELBROT, 1998].

As primeiras observações sobre fractais vieram da geometria: a ideia básica era a de escalar os objetos em unidades menores, sendo o objeto como um todo passível de ser obtido como um “esticamento” (ou “escalonamento”) do menor. O ponto que nos interessa aqui é que este escalonamento, nos fractais, é feito com o mesmo valor em todas as direções, ou seja: há apenas um fator de escala que permite ir do menor ao maior (ou vice-versa).

Estes objetos têm sido encontrados em várias áreas, como na física experimental, química, matemática, geofísica, fisiologia, incluindo economia e ciências sociais aplicadas. Acontece que

o mais frequente, na natureza são sistemas complexos, fora do equilíbrio, para os quais não é possível modelar e explicar seu comportamento por meio de uma única escala exponencial: diferentes direções se transformam com diferentes expoentes. Assim, ao caracterizar estes sistemas, precisamos não de um, mas de um conjunto de expoentes de escala, caracterizando os assim chamados multifractais.

O comportamento multifractal foi primeiramente descrito por Mandelbrot no livro “Les Objets Fractal: forme, hasard et dimension” e, mais tarde, confirmado por Mantegna e Stanley [MANTEGNA & STANLEY, 1996]. Nos últimos anos, vários autores têm estudado uma gama ampla de fenômenos e sistemas que exibem este comportamento multifractal. Eles aparecem, no mais das vezes, nas séries temporais vindas da experiência, da observação ou de simulações computacionais. Exemplos são o mercado financeiro [MAGANINI et al., 2018; DA SILVA FILHO et al., 2018] e diagnóstico médico [SILVA, 2014], em cardiologia ou neurologia.

Neste trabalho usamos uma das principais ferramentas para se analisar as séries temporais multifractais, o MFDFA (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis), para verificar se o Sistema de Lorenz – um dos fractais mais conhecidos popularmente – é na verdade um monofractal (com um só parâmetro de escala) ou um multifractal (com vários parâmetros de escala).

## **2 Métodos de pesquisa**

Mandelbrot iniciou os estudos sobre multifractais em 1975 [MANDELBROT, 1998]. Ele mostra, neste livro, que muitas séries encontradas na natureza não podem ser explicadas por uma única escala exponencial e chega à conclusão de que há evidência de multifractalidade em muitos casos (como numa couve-flor). Nos últimos anos vários modelos se desenvolveram com o objetivo de analisar as propriedades multifractais das séries temporais. Dentre

os mais utilizados estão: (1) o método de Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA), que é a generalização do método DFA, desenvolvido por Kantelhardt et al. [KANTElhARDT et al., 2002] e (2) o método Wavelet Transform Modulus Maxima Method (WTMM), que é uma extensão do modelo descrito por Holschneider [HOLSCHNEIDER, 1998].

Usaremos, neste trabalho, O MFDFA. Ele é, atualmente, o método mais utilizado na área de simulações computacionais, em Econofísica e na análise de séries fisiológicas em medicina. Nos parágrafos seguintes faremos uma descrição do método MFDFA. O que se segue, então, é praticamente o roteiro descrito originalmente por Kantelhardt [KANTElhARDT et al., 2002] e utilizado em centenas de trabalhos na literatura.

O algoritmo consta de seis etapas. Seja  $x_k$  uma série temporal de comprimento N e com suporte compacto, ou seja,  $x_k=0$  somente para uma fração insignificante de valores.

Etapa 1: Determina-se o “perfil” Y:

$$Y(i) \equiv \sum_{k=1}^i [x_k - \langle x \rangle], i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Etapa 2: Divide-se o perfil  $Y(i)$  em  $N_s \equiv \text{Int}[\frac{N}{s}]$  segmentos de comprimento s não superpostos. Como o comprimento N das series normalmente não é um múltiplo da escala s considerada, sobrar , quase sempre, uma pequena porão ao final. A fim de não desconsiderar esta pequena porão da série, repete-se o mesmo procedimento, mas começando do final para o início da série (na ordem inversa, portanto). Assim, são obtidos  $2N_s$  segmentos no total.

Etapa 3: Calcula-se a tendência local para cada um dos  $2N_s$  segmentos por uma regressão, usando o método dos mínimos quadrados. Após isso, determina-se a variância:

$$F^2(s, v) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(v-1)s+i] - y_v(i)\}^2 \quad (2)$$

Para cada segmento  $v, v = 1, \dots, N_s$  and

$$F^2(s, v) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[N - (v - N_s)s + i] - y_v(i)\}^2 \quad (3)$$

Para  $v = N_s + 1, \dots, 2N_s$ . Aqui,  $y_v(i)$  é o polinômio ajustado para o segment  $v$ .

Etapa 4: Faz-se a média sobre todos os segmentos a fim de obter a função de flutuação de q-ésima ordem:

$$F_q(s) \equiv \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(s, v)]^{q/2} \right\}^{1/q} \quad (4)$$

Aqui, a variável “q” pode ter qualquer valor, exceto zero. Os passos 2 a 4 ser repetidos para diferentes escalas de tempo s.

Etapa 5: Determina-se o comportamento de escala da função de flutuação através da análise de gráficos log-log de  $F_q(s)$  contra s, para cada valor de q (já que fenômenos com invariância de escala obedecem a uma lei de potência [MANDELROT, 1998]).

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad (5)$$

A função  $h(q)$  é conhecida como Expoente de Hurst Generalizado.

Etapa 6: Eq. (5) pode ser escrita como  $F_q(s) = AS^{h(q)}$ , a partir da qual, tirando-se logaritmos dos dois lados, chega-se em:

$$\log F_q(s) = \log A + h(q) \log s \quad (6)$$

Podendo-se obter, assim, o valor do Expoente de Hurst Generalizado.

Séries temporais monofractais são caracterizadas por um

único expoente de escala. Assim, espera-se que o Expoente de Hurst Generalizado,  $h(q)$ , seja independente de  $q$ . Esta diferença é a base da distinção entre os dois tipos de comportamento neste método:  $h(q)$  não varia com  $q$  para as series monofractais, mas varia com  $q$  para as series multifractais. A origem deste fato está em que os diferentes fatores de escala para pequenas e grandes flutuações produzirão dependência significativa de  $h(q)$  em função de  $q$ . Estas diferenças são diferentes para diferentes valores de  $q$ :  $q$ 's positivos e  $q$ 's negativos. Para valores de  $q$  positivos,  $h(q)$  descreve o comportamento de escala dos segmentos com grandes flutuações, enquanto que para valores de  $q$  negativos, os expoentes de escala  $h(q)$  descrevem o comportamento de escala para segmentos com pequenas flutuações.

Assim, a maneira mais aceita pela comunidade científica de confirmar a multifractalidade nas series temporais é através da análise do seu espectro, onde por espectro deve-se entender o conjunto dos valores para  $h(q)$  ou para  $\alpha(q)$ , onde  $\alpha(q)$  é obtido a partir de  $h(q)$  por uma transformação. Esta análise é baseada na seguinte relação entre o Expoente de Hurst Generalizado,  $h(q)$ , e o Expoente de Renyi,  $\tau(q)$  [GREEN et al., 2014]:

$$\tau(q) = qh(q) - 1 - q(h(1) - 1) \quad (7)$$

A partir da equação (7) deduz-se, fazendo-se uma transformação de Legendre:

$$\alpha = \frac{d}{dq} \tau(q) \quad \text{e} \quad f(\alpha) = \alpha(q) q - \tau(q) \quad (8)$$

Usando a Equação 6, define-se o grau de multifractalidade pode ser definido como:

$$\Delta h = \max[h(q)] - \min[h(q)] \quad (9)$$

Já usando a Equação 8, chega-se a uma medida alternativa (embora equivalente) do grau de multifractalidade como:

$$\Delta\alpha = \max[\alpha] - \min[\alpha] \quad (10)$$

Na seção seguinte faremos uma análise, com o auxílio das formulas e expressões de 1 a 10 acima, da presença ou não de multifractalidade no Sistema de Lorenz quando no regime caótico.

### 3 Dados e Resultados

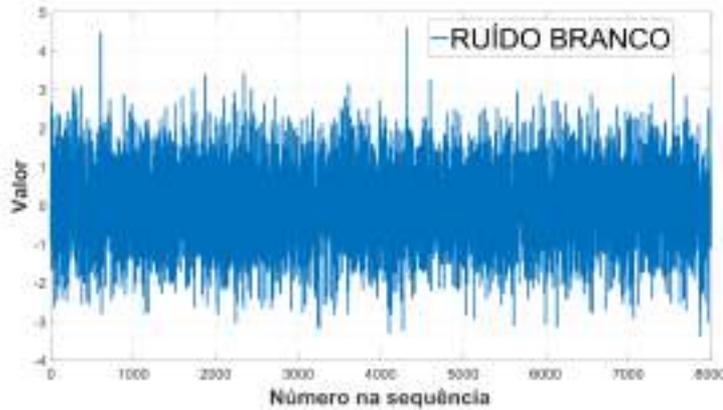
Foram utilizadas 3 séries temporais, com 8.000 valores em cada uma, como padrão para se fazer as comparações:

- (1) Uma série de Ruído Branco (Whitenoise);
- (2) Uma série Monofractal;
- (3) Uma série Multifractal;

O ruído branco é um sinal aleatório, com a mesma intensidade nas diferentes frequências. Tecnicamente, é uma sequência de variáveis aleatórias não autocorrelacionadas, com media zero e variância infinita. As series monofractais e multifractais obedecem às condições já expostas neste artigo.

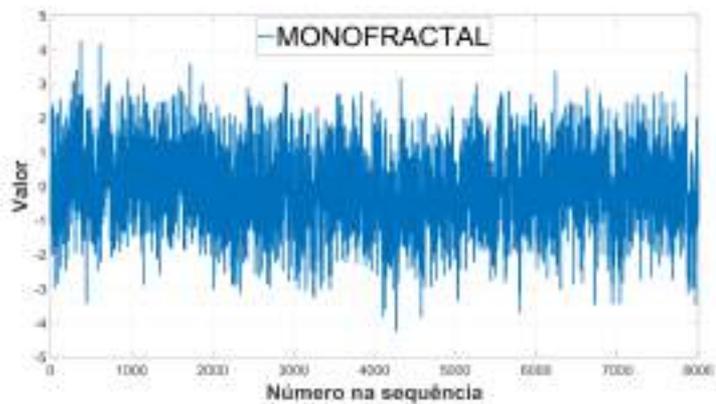
Elas foram obtidas a partir de um artigo sobre o método MFDFA [IHLEN, 2012]. Os gráficos das suas series temporais estão exibidos nas figuras 1, 2 e 3 a seguir:

Figura 1 – Série temporal do Ruído Branco



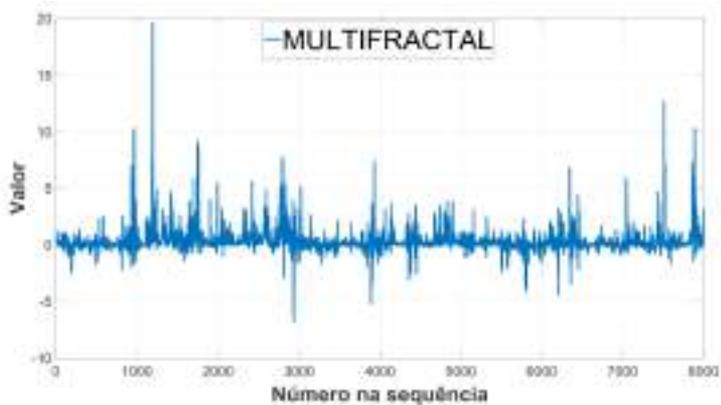
Fonte: Autores

Figura 2 – Série temporal Monofractal.



Fonte: Autores

Figura 3 – Série temporal Multifractal.



Fonte: Autores

O Modelo (ou Sistema) de Lorenz é constituído por três equações diferenciais não lineares que conectam três funções ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ) e é matematicamente expresso como (GULICK, 1992):

$$dx/dt = \sigma y - \sigma x$$

$$dy/dt = rx - y - xz$$

$$dz/dt = xy - bz$$

A variável  $t$  refere-se ao tempo e, ao contrário do que se pensa, as variáveis  $x$ ,  $y$ ,  $z$  não se referem às coordenadas no espaço. Na verdade,  $x$  representa a amplitude das correntes de convecção,  $y$  é a diferença de temperatura entre as correntes de ar ascendentes e descendentes e  $z$  representa a distorção da temperatura normal no plano. As constantes são dadas por:

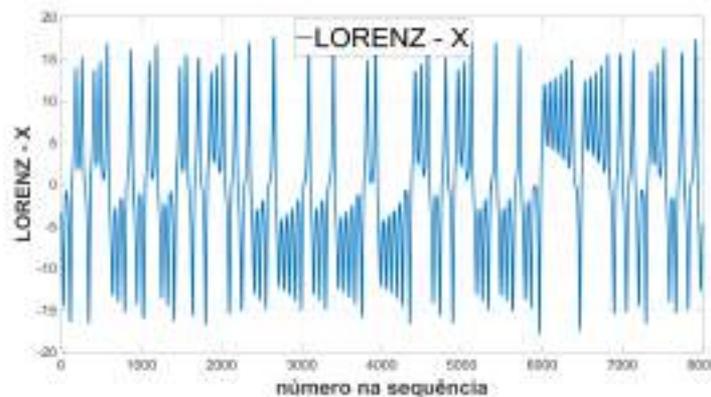
$\sigma = \nu/\kappa$ , chamado Número de Prantdtl;

$r = R_a/R_c$ , chamado número de Rayleigh;

$b = \frac{4}{1+a^2}$ , uma constante relacionada com o espaço dado.

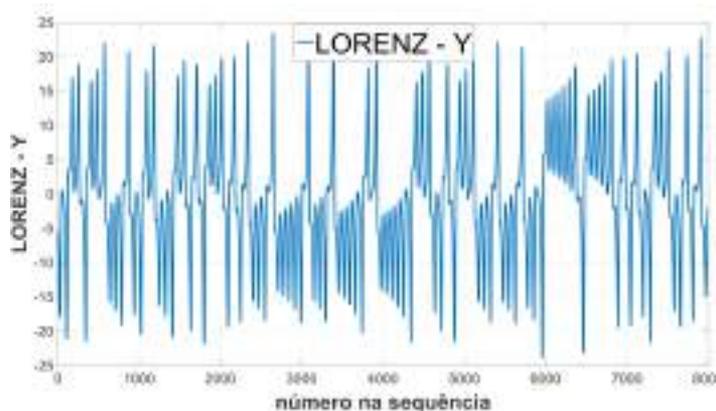
Este modelo exhibe comportamento caótico, caso as constantes sejam colocadas como:  $\sigma = 10$ ;  $r = 28$ ;  $b = 8/3$ . O sistema foi resolvido numericamente e foram gerados, também, 8.000 valores para cada uma das três funções ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ). A séries destes valores estão nas figuras 4, 5 e 6:

Figura 4 – Série temporal da componente “x” do Sistema de Lorenz.



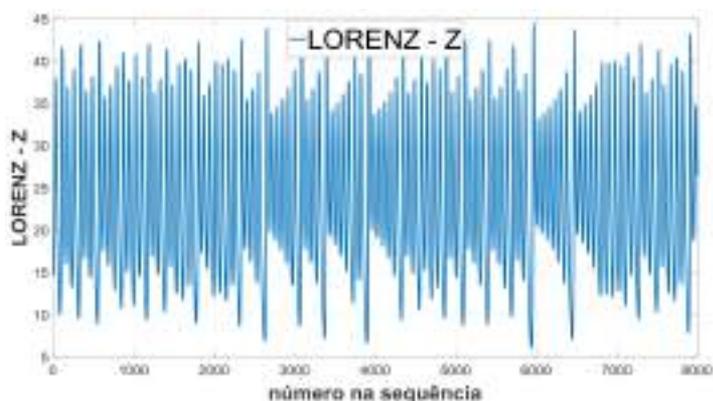
Fonte: Autores

Figura 5 – Série temporal da componente “y” do Sistema de Lorenz.



Fonte: Autores

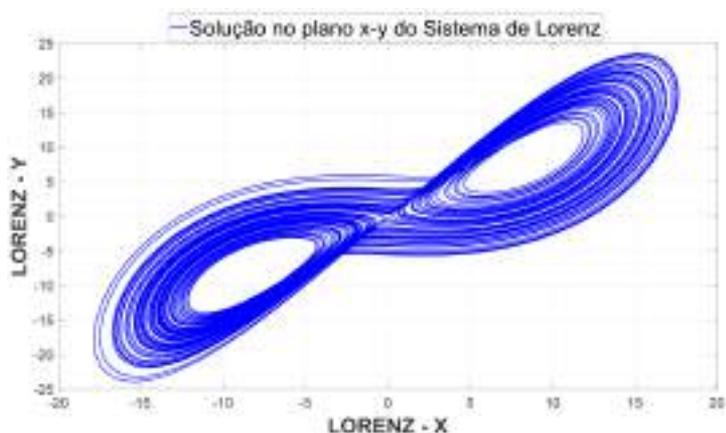
Figura 6 – Série temporal da componente “z” do Sistema de Lorenz.



Fonte: Autores

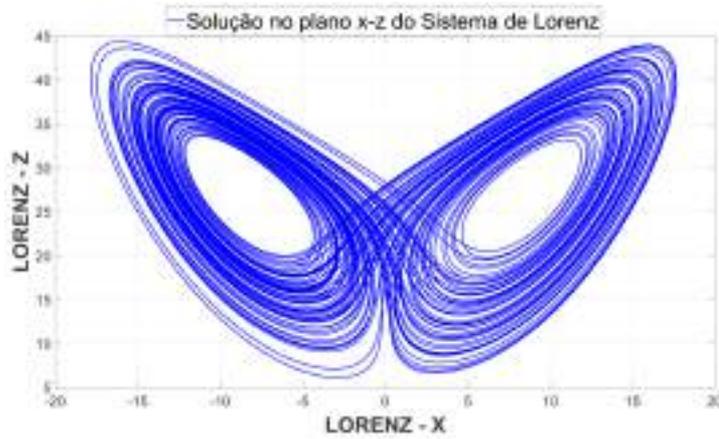
As projeções destas variáveis nos eixos nos fornecem as representações usuais conhecidas até na literatura popular do Sistema de Lorenz com comportamento caótico:

Figura 8 – Projeção do Sistema de Lorenz no plano x-y.



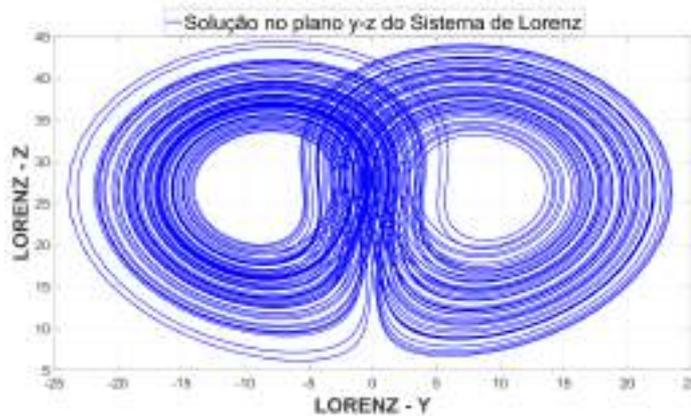
Fonte: Autores

Figura 7 – Projeção do Sistema de Lorenz no plano x-z.



Fonte: Autores

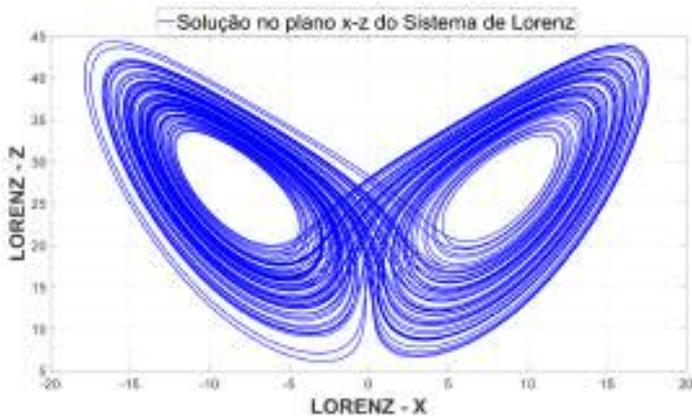
Figura 9 – Projeção do Sistema de Lorenz no plano y-z.



Fonte: Autores

Já a projeção nos três eixos, produz o assim chamado atrator de Lorenz:

Figura 10 – O Atrator de Lorenz.

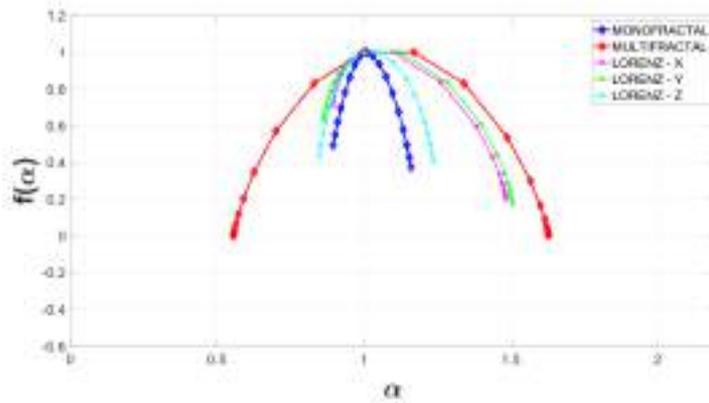


**Fonte:** Autores

As equações de 1 a 10 foram resolvidas para estas séries, e os resultados estão nas figuras a seguir. A figura 11 mostra  $f(\alpha)$  em função de  $\alpha$ . Podemos ver que as curvas para as componentes do Sistema de Lorenz situam-se entre as curvas monofractal e multifractal. Isto fica melhor evidenciado na figura 14.

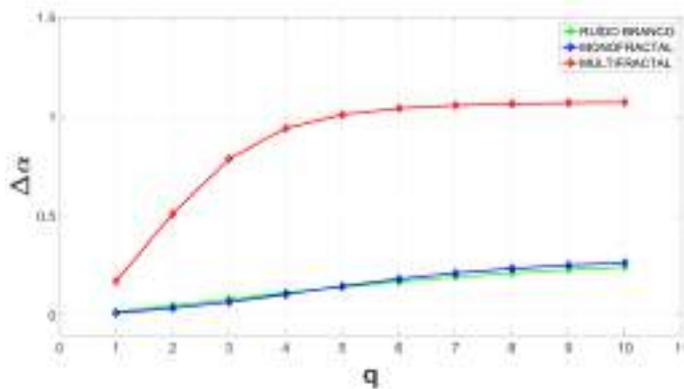
Nas figuras 12 e 13, colocamos os dois padrões, a série monofractal e a série multifractal, além da série do Ruído Branco. Fica evidente que a série monofractal difere apenas ligeiramente da série do Ruído Branco e, assim, usaremos nas figuras 13 e 14 apenas as curvas para as séries monofractal e multifractal. Nas figuras 12 e 13 podemos identificar uma variação muito maior para a série multifractal e, então, usaremos esta configuração como um padrão de comparação entre as séries geradas pelo Sistema de Lorenz e as mono e multifractais.

Figura 11 – Gráfico de  $f(\alpha)$  em função de  $\alpha$ .



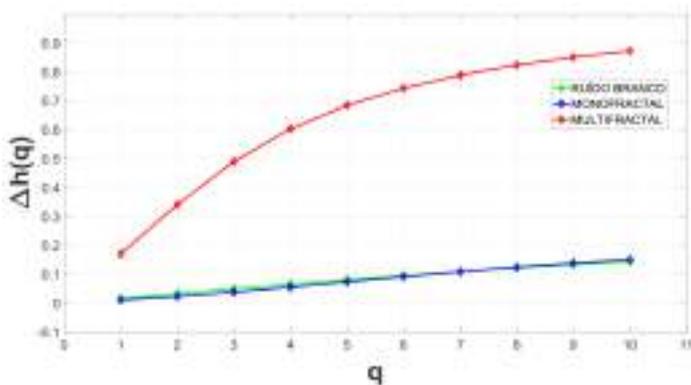
Fonte: Autores

Figura 12 – Série temporal da componente “y” do Sistema de Lorenz.



Fonte: Autores

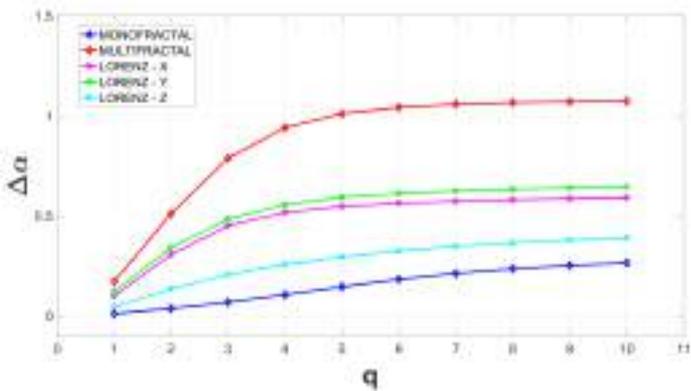
Figura 13 – Série temporal da componente “z” do Sistema de Lorenz.



Fonte: Autores

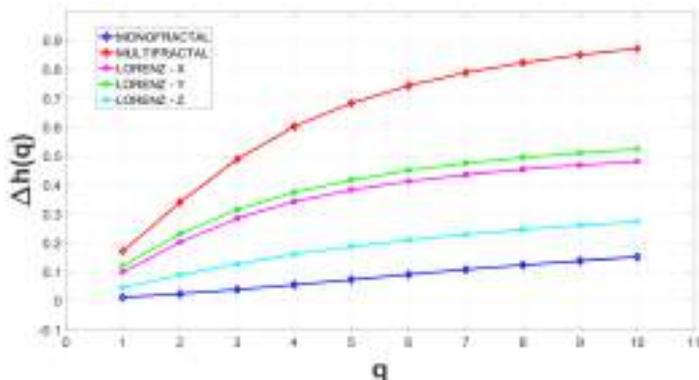
A figure 15 permite verificar que as curvas obtidas a partir das três componentes do Sistema de Lorenz situam-se entre as curvas monofractal e multifractal. Isto é uma evidência do comportamento multifractal destas componentes, pois os deltas assumem valores maiores do que os assumidos pela série monofractal. Não obstante, se formos associar uma medida do grau de multifractalidade a estes deltas, temos o resultado de que o Sistema de Lorenz é multifractal, mas apenas ligeiramente multifractal, não fortemente.

Figura 14 – Série temporal da componente “y” do Sistema de Lorenz.



Fonte: Autores

Figura 15 – Série temporal da componente “z” do Sistema de Lorenz.



Fonte: Autores

## 6 Conclusões

Este trabalho procurou examinar a multifractalidade do conhecido Sistema de Lorenz. Através dos parâmetros  $\Delta h$  e  $\Delta \alpha$  e usando-se series já reconhecidas como tais na literatura como padrão, pudemos mostrar que as componentes do Sistema de Lorenz no regime caótico apresentam um comportamento multifractal, embora apenas levemente multifractal.

## Referências

DA SILVA FILHO; MAGANINI, N. D.; ALMEIDA, E. F. Multifractal Analysis of Bitcoin Market. *Physica A*, v. 512, p. 954-967, 2018.

GREEN, E.; HANAN, W.; HEFFERNAN, D. The origins of multifractality in financial time series and the effect of extreme events. *The European Physical Journal B*, v. 87, n. 6, 2014.

GULICK, Denny. *Encounters with Chaos*. New York: Mc Graw, 308 p., 1992.

HOLSCHNEIDER M. On the wavelet transformation of fractals objects. *Journal of Statistical Physics*, v. 50, p. 963-993, mar. 1988.

IHLEN , E. A. F. Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in MatLab. *Frontiers in Physiology*, v. 3, p. 1-18, jun. 2012.

KANTELHARD J. W et al. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*, v. 316, p. 1-18, 2002.

MANDELBROT, Benoît. *Objetos Fractais*. Lisboa, Gradiva, 1998. 190 p.

MANTEGNA, Rosario Nunzio; STANLEY, Harry Eugene. Turbulence and financial markets. *Nature*, v. 383, p. 587-588, out. 1996.

MAGANINI, N. D., DA SILVA FILHO, A.C., LIMA, F. G. Investigation of multifractality in the Brazilian stock market. *Physica A*, v. 497, p. 458-471, 2018.

SILVA, F.M.; DA SILVA FILHO, A.C.; CRESCENCIO, J.C.; PAPA, V.; GALLO JUNIOR, L. V. Papa, L. The loss of multifractality as evidence of impaired Left Ventricular Ejection Fraction in patients after acute myocardial infarction, in: *Computing in Cardiology Conference (CinC)*, IEEE, v. 2014, p. 413–416, 2014.

## LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA OFERECIDAS NA MODALIDADE PRESENCIAL NA REGIÃO DE FRANCA – SP: um breve levantamento

Rafaela Dalalian Souza Boneti  
Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Silvia Regina Viel

**Resumo:** Este artigo faz um breve levantamento sobre instituições que oferecem o curso de licenciatura em Matemática na região de Franca, Estado de São Paulo. Esta região que foi estabelecida por um raio de 200 Km ao redor da cidade, ou seja, instituições que ficam até 200 Km de Franca estarão presentes nesta pesquisa. Fizeram parte do levantamento todas as instituições que oferecem presencialmente a licenciatura em Matemática, além da informação se o curso tem sido ofertado, com abertura real de turma. Este levantamento dará subsídios para análises e discussões com foco na formação de professores, em especial do professor de Matemática, dando também ênfase à importância da licenciatura para o país.

**Palavras-chave:** Licenciatura, Matemática, Formação de Professores, Ensino Presencial.

### 1 Introdução

Atualmente é possível encontrar inúmeros cursos que são oferecidos em parte ou totalmente na modalidade a distância, porém quando se trata de licenciaturas, este número cai para ambas as modalidades, presencial ou a distância. Aqui serão apresentados dados que estão relacionados à modalidade presencial, em uma região definida por cerca de 200 quilômetros ao redor de Franca.

Esta pesquisa tem como pergunta: quais instituições de ensino superior oferecem licenciatura em Matemática presencial e, em dez anos, quantas turmas foram abertas. O objetivo deste trabalho é reforçar como o número de licenciaturas vem diminuindo na região estudada.

Neste artigo traz-se um alerta para a importância do incentivo a formação de professores de Matemática com vista à falta

de profissionais para atuar nas escolas e mostra-se os números relacionados aos cursos de licenciatura em Matemática oferecidos atualmente, atualizando assim a quantidade de turmas abertas no intervalo de tempo de 2008 até 2018.

Esta pesquisa está dividida em um breve referencial sobre formação de professores, em seguida como foram feitas as coletas e análise de dados e finalmente as considerações finais.

## **2 Formação de Professores**

Os cursos que têm o objetivo de formar professores são chamados de licenciaturas, segundo Gatti (2010) estes cursos formam os professores para a Educação Básica, que abarca a Educação Infantil, os Ensinos Fundamental, Médio, Profissionalizante, a Educação de Jovens e Adultos e a Educação Especial.

Ainda de acordo com a autora, a nossa sociedade enfrenta graves problemas relacionados à aprendizagem escolar e deixa claro que esta preocupação não deve estar ligada apenas ao professor ou à formação deste, mas as estruturas, currículos e conteúdos destas instituições também fazem parte da preocupação.

Múltiplos fatores convergem para isso: as políticas educacionais postas em ação, o financiamento da educação básica, aspectos das culturas nacional, regionais e locais, hábitos estruturados, a naturalização em nossa sociedade da situação crítica das aprendizagens efetivas de amplas camadas populares, as formas de estrutura e gestão das escolas, formação dos gestores, as condições sociais e de escolarização de pais e mães de alunos das camadas populacionais menos favorecidas (os “sem voz”) e, também, a condição do professorado: sua formação inicial e continuada, os planos de carreira e salário dos docentes da educação básica, as condições de trabalho nas escolas (GATTI, p.1359).

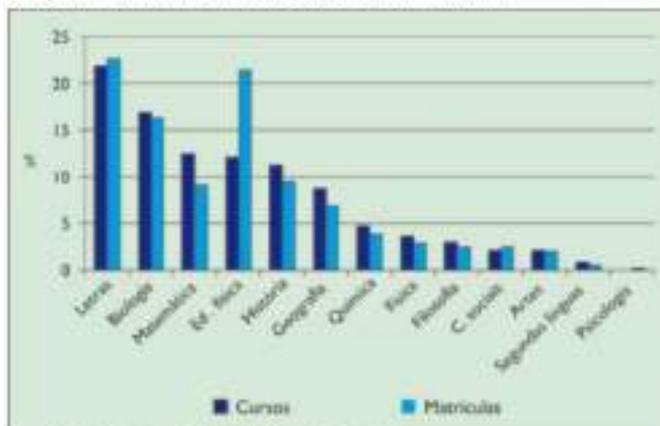
No evento nomeado como XXX Semana da Matemática do IBILCE/UNESP oferecido pela UNESP de São José do Rio Preto, a Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Sílvia Regina Viel apresentou alguns dados de suas pesquisas que envolvem a licenciatura em Matemática. Em sua palestra foi possível ver alguns fatores que influenciam negativamente a formação de professores, como os salários, as condições em sala de aula, o reconhecimento social, a desvalorização da carreira docente e, ainda no caso da Matemática, temos a famosa cultura da “dificuldade na disciplina”.

Ainda segundo Viel (2011), em sua tese de doutorado é salientado que mesmo com todos os fatores, desinteresse e indisciplina dos alunos, as escolas com seus conflitos, os professores mantêm as esperanças de que é possível melhorar essa situação. Para que isso aconteça, a melhora física das instalações, gestão escolar, políticas públicas, entre outros aspectos, devem ser colocados em pauta e melhorados para auxiliar no ensino e aprendizagem das salas de aula.

Atualmente as escolas de ensino básico têm em sua carga horária seis aulas de Matemática para o Ensino Fundamental II e cinco aulas de Matemática para o Ensino Médio, assim boa parte das trinta aulas semanais está ligada à Matemática. A outra única disciplina que tem esta mesma quantidade de aulas é Português, sendo esta a língua falada no país, ou seja, a disciplina Matemática é de extrema importância dentro do currículo.

A seguir, em nível superior, será possível ver que as matrículas para os cursos de licenciatura não são proporcionais aos cursos oferecidos, não condizendo assim com a “importância” dessa disciplina para a Educação Básica. Segundo o INEP (2006), haveria apenas em torno de 27% do professores de Matemática com formação específica na área”, sabendo que outras formações capacitam no ensino de matemática como licenciaturas com habilitações, engenharias e outros.

**GRÁFICO 3 – Licenciaturas II: cursos e matrículas nas disciplinas que compõem o currículo da educação básica – Brasil, 2006**



Fonte: MEC/Inep, Sistema Estatístico da Educação Superior 2006

Os professores não são apenas formados em licenciaturas, estes além da formação, devem ter conhecimento, desenvolvimento e prática profissional:

“Além disso são necessárias qualidades humanas e profissionais como um bom relacionamento com os alunos e capacidade para lidar com os problemas com que se depara no seu dia-a-dia. Tudo isso depende, naturalmente, da capacidade do professor se atualizar profissionalmente. Para que o professor possa ter todas estas características, é necessário dispor de uma formação adequada e, para isso, é requerido o concurso de diversas áreas do saber, desde a Matemática à Educação em geral, incluindo, naturalmente, a Didática da Matemática. Esta tem a responsabilidade de analisar os fenômenos educativos que ocorrem no ensino-aprendizagem desta disciplina e de proporcionar as ferramentas fundamentais que o professor usa na sua prática profissional, cabendo-lhe integrar os contributos e os recursos disponibilizados pelas restantes áreas (PONTE, 2014; p.344)

Algumas conclusões trazidas pelo livro “Professores do Brasil” sobre licenciaturas presenciais, são: que o poder público tem mostrado uma participação relevante no oferecimento de

cursos de licenciaturas pelas instituições de ensino superiores públicas, oferecendo assim essa formação em regiões menos dinâmicas economicamente, os ingressantes no ensino superior geralmente optam por áreas em que as ofertas de empregos são mais convidativas e variadas do que o magistério, os cursos de formação de professores até o 5º ano tendem a ser oferecidos por universidades estaduais e as demais licenciaturas pelas federais, no setor público.

Segundo o site Guia do Estudante, uma pessoa que escolhe bacharel pode atuar de uma forma mais ampla no mercado e a licenciatura é indicada para quem tem vontade de dar aula. Ainda de acordo com o site, a licenciatura é um bom campo a ser escolhido, pois neste sempre haverá demanda. O licenciado pode atuar em algumas áreas do mercado de trabalho, porém o bacharel não está habilitado a dar aulas.

Em suma, podemos acordar que mesmo com todos os problemas vivenciados, a licenciatura ainda tem chances de voltar a ser uma área preferida pelos alunos ingressantes nas graduações, pois professores sempre serão necessários para suprir a demanda de alunos e são eles os responsáveis pelas possibilidades de melhora no panorama nacional, já que uma educação de qualidade muda a realidade de um país.

### **3 Desenvolvimento da Pesquisa**

Esta pesquisa inicialmente foi feita com a ajuda do site CalcMaps, de uma ferramenta do Google, e de um aplicativo chamado Photoshop, os quais ajudaram a encontrar a distância entre algumas cidades e colaboraram para a elaboração da pesquisa.

Uma das primeiras dúvidas levantadas para a realização desta pesquisa era como selecionar as cidades que pertencem à região delimitada. Assim em uma pesquisa pela internet foi

encontrado o CalcMaps, este site trás a área do mapa, distância, elevação, raio e as coordenadas das cidades. A seguir apresenta-se a página “Raio No Mapa”, que foi utilizada e com a qual foi possível traçar um círculo cujo raio era de 200 Km para que as cidades fossem encontradas.

Imagem 1

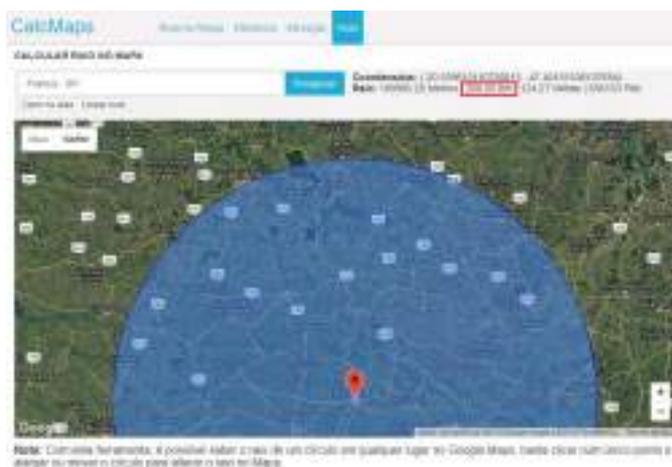
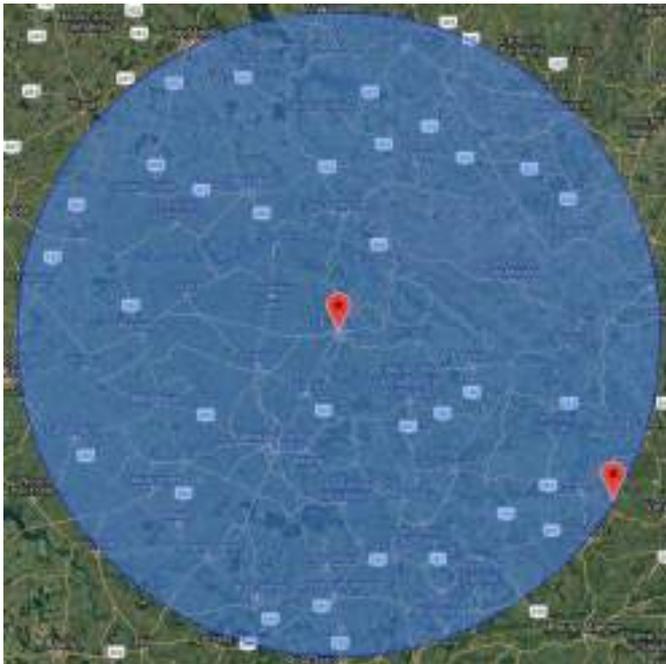


Imagem 2



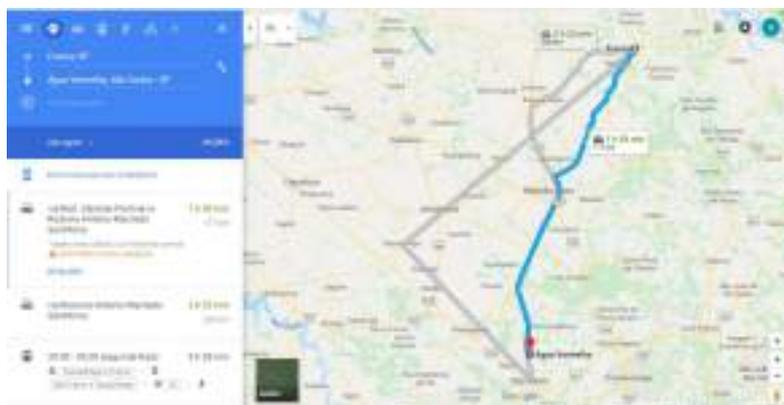
A ilustração a seguir é uma montagem feita no Photoshop, que é um programa de edição de imagens. Com ele foi possível juntar as duas imagens anteriores e fazer uma completa. Entretanto a ilustração a seguir apresenta duas aproximações a menos do que a utilizada para tirar os dados necessários para a pesquisa.

Imagem 3



Para a próxima imagem foi utilizado uma ferramenta do Google que se chama Google Maps, foi ela que possibilitou o acesso à quantidade de quilômetros entre um ponto de partida e um destino. Lembrando que em todas as pesquisas a menor rota que aparecia era a escolhida e quando o limite de 200 Km era ultrapassado a cidade era imediatamente excluída dos dados por não pertencer a região delimitada na pesquisa.

Imagem 4



Em suma, o site CalcMaps, a ferramenta Google Maps e o aplicativo Photoshop facilitaram o desenvolvimento desta pesquisa. Estes fizeram com que fosse possível mapear distâncias e localizar instituições.

### 3.1 Coleta de dados

Para responder a dúvida inicial “quais são as cidades com até 200 km de Franca-SP?”, foi encontrado o CalcMaps e com ele foram localizadas as cidades. Em seguida, foi utilizado o Google Maps para encontrar a distância de cada e ter a certeza de que as cidades não passavam do perímetro estabelecido para a pesquisa, assim algumas cidades foram retiradas, pois o CalcMaps apresentava um círculo perfeito com o raio de 200km, porém para chegar às cidades as estradas têm curvas, subidas e descidas, sendo consideradas assim a distância no que tange a superfície percorrida de uma cidade a outra.

Logo em seguida teve início uma outra pesquisa, com o intuito de encontrar Faculdades, Centros Universitários e Universidades nas cidades selecionadas. Foram elencadas

39 instituições de ensino superior, mas a partir daí teve início a verificação de quais destas instituições ofereciam o curso de licenciatura em Matemática, na modalidade presencial. Cientes de que não bastava só a informação da existência do curso, que muitas vezes não tem turmas em andamento, passamos a verificar quais deles tiveram entre 2008 e 2018 turmas abertas.

Após encontrar quais estabelecimentos ofereciam o curso de licenciatura em Matemática na modalidade presencial, foi iniciado um trabalho de contato por telefone e e-mail para a coleta de dados direto nas instituições. Estes telefones foram tirados dos sites das instituições e a assim foi iniciado um contato com coordenador de cada uma das instituições de ensino superior (IES). Quando os coordenadores não se encontravam era solicitado aos funcionários o seu e-mail e a partir deste momento as dúvidas eram levantadas via mensagens.

A seguir as perguntas feitas:

**Perguntas que foram as nos e-mails ou ligações:**

*Na "instituição" há cursos presenciais?*

*Oferece licenciatura em Matemática – Ensino Presencial?*

*De 2008 a 2018, em quais anos abriu turma da licenciatura em Matemática presencial?*

*Se não oferece mais, já foi oferecido?*

#### **4. Dados da Pesquisa**

A seguir apresenta-se uma tabela que contém os dados das 99 cidades que foram selecionadas. Também são elencados seus Estados e a quantidade de Km de distância que elas ficam da cidade de Franca, que é o ponto de partida da presente pesquisa.

Cidades até 200 km de distância de Franca							
N°	Cidade	Estado	Km de distância	N°	Cidade	Estado	Km de distância
1	Água Vermelha	São Carlos, SP	175 Km	51	Jaboticabal	SP	148 Km
2	Alberto Moreira	Barretos, SP	130 Km	52	Jacuí	MG	114 Km
3	Alfenas	MG	258 Km	53	Jardinópolis	SP	82,8 Km
4	Alinópolis	SP	83,2 Km	54	Laranjeiras	Colômbia, SP	167 Km
5	Aramina	SP	102 Km	55	Lula Antônio	SP	138 Km
6	Araçuaia	SP	175 Km	56	Malão	SP	188 Km
7	Araçá	MG	172 Km	57	Ngatêópolis	SP	105 Km
8	Arçari	Ibá, MG	187 Km	58	Mococa	SP	161 Km
9	Barretos	SP	135 Km	59	Monte Santo de Minas	MG	113 Km
10	Barinha	SP	126 Km	60	Morro Agudo	SP	85,5 Km
11	Batatais	SP	46,2 Km	61	Morro de Mesa	São Sebastião do Paraíso, MG	112 Km
12	Bebedouro	Burizal, SP	75,3 Km	62	Muzambinho	MG	180 Km
13	Brodowski	SP	85,7 Km	63	Nuporanga	SP	51,1 Km
14	Burizal	SP	73,5 Km	64	Olimpia	SP	178 Km
15	Cacunda	SP	185 Km	65	Oriândia	SP	75,1 Km
16	Cajuru	SP	115 Km	66	Passoa	MG	104 Km
17	Capelândia	MG	43,4 Km	67	Patrocínio Paulista	SP	20,2 Km
18	Capitão	MG	176 Km	68	Pedregulho	SP	43,4 Km
19	Carro do Rio Claro	MG	170 Km	69	Pirassununga	SP	190 Km
20	Casa Branca	SP	187 Km	70	Pitangueiras	SP	139 Km
21	Cássia	MG	62,8 Km	71	Plumhi	MG	194 Km
22	Colômbia	SP	175 Km	72	Planura	MG	181 Km
23	Corazol	MG	22,1 Km	73	Pontal	SP	116 Km
24	Colina	SP	143 Km	74	Porto Ferreira	SP	172 Km
25	Conceição da Aparecida	MG	196 Km	75	Pratópolis	MG	83,6 Km
26	Conceição das Alagoas	MG	185 Km	76	Realinga	SP	18 Km
27	Conquista	MG	128 Km	77	Ribeirão Preto	SP	89 Km
28	Cravinhos	SP	107 Km	78	Ribânia	SP	70,2 Km
29	Cristais Paulista	SP	20 Km	79	Rincão	SP	155 Km
30	Definópolis	MG	95,4 Km	80	Sacramento	MG	104 Km
31	Deixa	MG	118 Km	81	Sales Oliveira	SP	61,3 Km
32	Descalvado	SP	188 Km	82	Santa Cruz das Palmeiras	SP	197 Km
33	Desemboque	Sacramento, MG	114 Km	83	Santa Eudóxia	SP	197 Km
34	Dobrada	SP	179 Km	84	Santa Juliana	MG	174 Km
35	Franca	SP	—	85	Santa Rita do Passa Quatro	SP	172 Km
36	Furnas	São José da Barra, MG	138 Km	86	Santa Rosa de Viterbo	SP	153 Km
37	Guaiçá	SP	110 Km	87	São Carlos	SP	188 Km
38	Guará	SP	64,1 Km	88	São João Batista da Glória	MG	121 Km
39	Guaraçá	SP	175 Km	89	São José da Barra	MG	136 Km

40	Guaitã	SP	150 Km	90	São Joaquim da Barra	SP	58,1 Km
41	Gustatparã	SP	150 Km	91	São João do Rio Preto	SP	178 Km
42	Guacupê	MG	158 Km	92	Santa Juliana	MG	183 Km
43	Ibaité	SP	193 Km	93	São Sebastião do Paraíso	MG	78,2 Km
44	Ibiraci	MG	38,7 Km	94	São Tomás de Aquino	MG	50,8 Km
45	Igarapava	SP	110 Km	95	Semana	SP	93 Km
46	Ipuã	SP	74,8 Km	96	Severina	SP	183 Km
47	Itamogi	MG	118 Km	97	Taquaritinga	SP	170 Km
48	Itaú de Minas	MG	88,4 Km	98	Uberaba	MG	143 Km
49	Itapuí	SP	27,3 Km	99	Viradouro	SP	125 Km
50	Ituverava	SP	75,9 Km				

Fonte: Elaborado pela Autora

Em seguida foram listados os nomes das Universidades, Centros Universitários ou Faculdades que ofereciam cursos superiores nas cidades que ficavam na área pesquisada. Partindo do quadro anterior foi possível perceber que algumas cidades já não apareceram, pois não possuem Instituições de Ensino Superior na modalidade presencial. A tabela seguinte mostra os dados organizados:

Cidades que oferecem Cursos Superiores na Modalidade Presencial				
Nº	Cidade	Estado	Km de Franca	Universidades, Centros Universitários, Faculdades
1	Araraquara	SP	175 Km	FATEC – Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo IFSP – Instituto Federal de São Paulo UNESP – Universidade Estadual Paulista UNIARA- Universidade de Araraquara
2	Araxá	MG	172 Km	CEFET – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais UNIARAXÁ – Centro Universitário do Planalto de Araxá
3	Barretos	SP	135 Km	IFSP – Instituto Federal de São Paulo UNIFEB- Centro Universitário da Fundação Educacional de Barretos
4	Bebedouro	Buritizal, SP	75,3 Km	FATEC – Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo IMESB - Instituto Municipal de Ensino Superior de Bebedouro "Victorio Cardassi" UNIFAFIBE – Centro Universitário Bebedouro
5	Franca	SP	---	Faculdade de Direito de Franca FAPESF – Faculdade Pestalozzi de Franca FATEC – Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo UNESP – Universidade Estadual Paulista UNI FACEF – Centro Universitário Municipal de Franca UNIFRAN – Cruzeiro do Sul
6	Ituverava	SP	75,9	FFCL – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
7	Jaboticabal	SP	146 Km	UNESP – Universidade Estadual Paulista
9	Mococa	SP	161 Km	FATEC – Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo

## Uni-FACEF - Centro Universitário Municipal de Franca

10	Passos	MG	104 Km	IFSUM – Instituto Federal do Sul de Minas UEMG – Universidade do Estado de Minas Gerais
11	Pirassununga	SP	190 Km	USP – Universidade de São Paulo
12	Piumhi	MG	194 Km	IFMG – Instituto Federal de Minas Gerais
13	Ribeirão Preto	SP	89 Km	CBM – Centro Universitário Barão de Mauá FATEC – Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo UNAERP – Universidade de Ribeirão Preto UNIP – Universidade Paulista USP – Universidade de São Paulo
14	São Carlos	SP	186 Km	FATEC – Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo UFSCar – Universidade Federal de São Carlos USP – Universidade de São Paulo IFSP – Instituto Federal de São Paulo
15	São José do Rio Pardo	SP	178 Km	FFCL – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de São José do Rio Pardo
16	Taquaritinga	SP	170 Km	FATEC – Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo
17	Uberaba	MG	143 Km	FAZU – Faculdades Associadas de Uberaba IFTM – Instituto Federal do Triângulo Mineiro UFTM – Universidade Federal do Triângulo Mineiro UNIUBE – Universidade de Uberaba

Fonte: Elaborado pela Autora

Como parte subsequente do trabalho foi realizado um levantamento preliminar, com uso da internet, de quais instituições ofereciam o curso de licenciatura em Matemática na modalidade presencial, na região delimitada nesta pesquisa. Assim, segue resultado do levantamento:

Cursos de licenciatura em Matemática oferecidos na modalidade presencial					
Nº	Cidade	Estado	Km de Franca	de	Universidades, Centros Universitários ou Faculdades
1	Araraquara	SP	175 Km		IFSP – Instituto Federal de São Paulo
2	Barretos	SP	135 Km		UNIFEB – Centro Universitário da Fundação Educacional de Barretos
3	Bebedouro	Buritizal, SP	75,3 Km		UNIFAFIBE – Centro Universitário
4	Franca	SP	---		Unifran – Crzueiro do Sul Uni Facef – Centro Universitário Municipal de Franca
5	Ituverava	SP	75,9 Km		FFCL – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
6	Passos	MG	104 Km		UEMG – Universidade do Estado de Minas Gerais
7	Ribeirão preto	SP	89 Km		UNIP – Universidade Paulista
8	Uberaba	MG	143 Km		UFTM – Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Fonte: Elaborado pela Autora

A seguir, o quadro mostrará em quais anos nas Faculdades, Centros Universitários e Universidades foram abertas turmas do curso de Matemática, na modalidade Presencial, de 2008 a 2018, ou seja, a pesquisa se centrou nos 10 últimos anos, já que mudanças vem ocorrendo no cenário educacional com muita velocidade e destaca-se a importância na análise e reflexão sobre os últimos acontecimentos.

Cursos de licenciatura em Matemática oferecidos na modalidade presencial						
Nº	Cidade	Estado	Km de Franca	Universidades, Centros Universitários ou Faculdades	Centros ou	Turmas Abertas entre 2008 e 2018
1	Araraquara	SP	175 Km	IFSP – Instituto Federal de São Paulo		Todos os anos desde 2009
2	Barretos	SP	135 Km	UNIFEB – Centro Universitário da Fundação Educacional de Barretos		Não temos informação
3	Bebedouro/ Buritizal	SP	75,3 Km	Unifafibe – Centro Universitário		Abriu em 2008 e 2009
4	Franca	SP	---	Unifran – Cruzeiro do Sul		Não temos informação
				Uni-Facef – Centro Universitário Municipal de Franca		2008, 2009, 2010, 2011, 2013, 2014, 2015, 2016 e 2017
5	Ituverava	SP	75,9 Km	FFCL – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras		2008, 2010, 2012, 2014 e 2016
6	Passos	MG	104 Km	UEMG – Universidade do Estado de Minas Gerais		Não temos informação
7	Ribeirão Preto	SP	89 Km	UNIP – Universidade Paulista		Oferece, mas nunca abriu turma presencial.
8	Uberaba	MG	143 Km	UFTM – Universidade Federal do Triângulo Mineiro		É oferecido semestralmente desde o 1º semestre de 2009 até o 2º de 2018

Fonte: Elaborado pela Autora

## 5 Considerações finais

É possível perceber que em algumas células das tabelas faltam informações que não foram completadas na presente pesquisa, pois infelizmente não foi possível conseguir dados de algumas instituições, o contato foi feito diversas vezes por telefone e e-mail, porém as perguntas não foram respondidas.

Com esta pesquisa foi possível observar que no caso das Universidades Federais os números se mantêm, pois as turmas são abertas por meio de vestibulares, estabelecendo assim uma periodicidade. Já no caso das outras instituições, podemos perceber que os números das licenciaturas presenciais em Matemática caíram nos últimos 10 anos, não sendo oferecidas mais vagas.

Saliento como no início do trabalho a importância das licenciaturas, pois o País necessita destes profissionais para a sua melhora e é importante que novas políticas públicas devam ser implementadas para esta área, como também a melhoria dos salários, condições em sala de aula, estímulos ao estudo para os alunos do Ensino Básico para ingresso na carreira, enfim, cuidados para que o número de Licenciaturas viabilize o número suficiente e qualificado de professores para atuarem nas escolas básicas.

## Referências

GATTI, B. A. Formação de Professores no Brasil: características e problemas. p.1359. Disponível em: <<https://www.redalyc.org/html/873/87315816016/>>. Acesso em 11 de Dezembro de 2018.

GATTI, B. A. Professores do Brasil: impasses e desafios / Coordenado por Bernadete Angelina Gatti e Elba Siqueira de Sá Barreto. – Brasília: UNESCO, 2009. 294 p. Disponível em: <<https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000184682/PDF/184682por.pdf.multi>>

GUIA DO ESTUDANTE. Disponível em: <<https://guiadoestudante.abril.com.br/universidades/bacharelado->

ou-licenciatura/>. Acesso em 21/10/2018.

PONTE, J.P. (org.) Práticas profissionais do professor de Matemática. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. Disponível em: <<https://rosaurasoligo.files.wordpress.com/2014/12/prc3a1ticas-profissionais-dos-professores-de-matemc3a1tica-joc3a3o-pedro-da-ponte-org.pdf>>

VIEL, S. R. Um olhar sobre a formação de professores de matemática a distância: o caso do CEDERJ/UAB. Rio Claro, 2011, 218 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

## **Matemática e Arte: ensino de isometrias por meio de técnicas de Escher**

Aleff Jouni Ribeiro  
Lucas Borges Oliveira

Orientadora: Prof. Dra. Lucinda Maria de Fátima Rodrigues Coelho

**Resumo:** Através dos trabalhos artísticos de Escher buscamos apresentar uma forma dinâmica para estudar isometrias nas aulas de matemática ao abordar áreas de conhecimento de grande importância na formação do indivíduo de forma interdisciplinar como arte e matemática. Nesse contexto ao explorarmos as construções de Escher, relacionamos alguns conceitos matemáticos básicos de isometria e aplicamos sua técnica para reproduzir obras similares, com o intuito de desenvolver nos alunos o sentido espacial por meio de atividades que enfatizam a visualização e compreensão de relações espaciais além da observação e a percepção de semelhanças, diferenças e regularidades.

**Palavras chave:** Escher. Simetria. Obras.

### **1 Introdução**

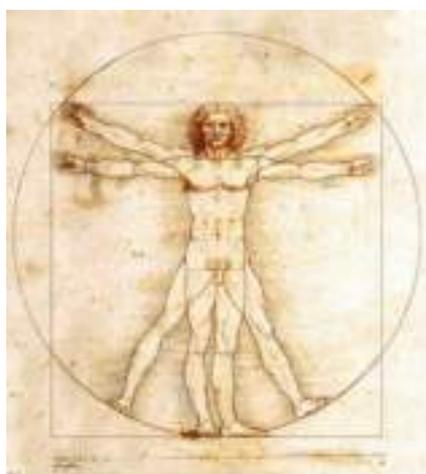
De acordo com a história da matemática a geometria foi utilizada como instrumento, bem antes do surgimento dos números e da escrita, por povos que viveram no período neolítico. Estes povos desenvolveram técnicas para criar ferramentas e utensílios domésticos tais como: lanças, facas, jarros e cestas, sempre considerando as dimensões e simetrias.

O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar e aparecem em todos os continentes. (BOYER e MERZBACH, 2012, p. 26).

As simetrias ocorrem, constantemente, na natureza tais

como: no corpo humano, nas pétalas de uma flor, nas imagens em um espelho, nas asas de uma borboleta ou em construções arquitetônicas. As simetrias também podem ser encontradas na arte, como, por exemplo, o desenho do corpo humano (figura 1), na arquitetura e em objetos da nossa vida comum, como, por exemplo, uma tesoura.

**Figura 1:** O homem Vitruviano de Leonardo Da Vinci (1452 – 1519)



**Fonte:** Google

Portanto, as antigas civilizações sempre tiveram o interesse por padrões e simetrias em formas de objetos, decorações e esculturas.

Simetrias às vezes são definidas como “proporções perfeitas e harmoniosas” ou “uma estrutura que permite que um objeto seja dividido em partes de igual formato e tamanho”. Quando pensamos em simetria, naturalmente, pensamos em algum tipo de combinação de todas ou algumas dessas palavras. Isto porque quer em biologia, em arquitetura, na arte ou geometria, as simetrias refletem, de alguma forma, todas estas características.

Diante do exposto acima, o objetivo desse trabalho

consiste em apresentar uma forma dinâmica para estudar esse conceito através das obras de Escher, que brilhantemente construía tesselações (ou “ladrilhamento”) com figuras congruentes relacionadas entre si por meio de reflexões, rotações, translações ou reflexões deslizantes. As técnicas usadas para esse processo são chamadas de transformações isométricas e cada uma produz um diferente tipo de simetria.

Ao abordar essas áreas do conhecimento de grande importância na formação do indivíduo, visamos aplicar atividades para alunos do ensino fundamental, que envolvam as transformações utilizadas por Escher em seus últimos trabalhos e apresentarmos algumas possibilidades de desenvolvimento de processos de estimativa visual, seja de comprimentos, ângulos ou outras propriedades métricas das figuras (BRASIL, 1997).

Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isso pode ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teia de aranha, ou formas em obras de arte, esculturas, pinturas, arquitetura, ou ainda em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, pisos, etc. (BRASIL, 1997, p. 81).

A seguir são apresentados: o conceito intuitivo das isometrias de translação, reflexão, rotação e reflexão deslizante, como transformações geométricas em que são conservadas as medidas de comprimento dos segmentos de reta e as medidas de amplitude dos ângulos e um resumo da vida e trabalhos de Escher para que se possa compreender a relação de suas obras com o ensino da simetria.

Com esses entendimentos, propomos algumas reflexões acerca de conteúdos matemáticos de geometria, simetria e isometria que consideramos relevantes para desenvolver as atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano. No decorrer

das atividades exploratórias fez-se relevante propor situações que possibilitassem as comparações de duas figuras, em que a segunda é resultante da reflexão (ou da translação ou da rotação), da primeira e permitir a descoberta do que permanece invariante e o que muda.

## 2 Simetria

O artista concretiza ou torna concreta as representações que ele tem através de uma obra de arte, o matemático torna concreto as representações que ele tem através de uma teorização, de uma explicação, de um resultado, de um teorema (D'AMBRÓSIO, 1993, p. 35).

Ao estudar o contexto histórico de algumas culturas observamos resquícios arqueológicos que nos dão a liberdade de interpretar e compreender a forma como a simetria foi utilizada ao longo da história da humanidade, por meio de pinturas, esculturas e arquiteturas. O foco desse capítulo é dado à pré-história, período paleolítico e neolítico, as culturas da idade antiga, antiguidade oriental e clássica.

### 2.1 Simetria na Matemática

Os Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN (BRASIL, 1997), tratam a simetria e suas ligações com situações apresentadas no cotidiano, tais como em algumas partes do corpo humano, na natureza e em objetos diversos que nos circundam.

Segundo o PCN de Matemática:

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com

situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1997, p.39).

A simetria relacionada com a Matemática vem com a ideia de dar ao aluno a capacidade de identificar e localizar objetos em mapas e planos, para trabalhar a movimentação através de representações gráficas. Uma das formas de utilizar a simetria é através da geometria quando trabalhamos com semelhança e congruência. Isso nos permite identificar e até provar o porquê de uma figura ser igual à outra.

No Ensino Fundamental, as crianças começam a trabalhar com situações que ocorrem no dia a dia, como por exemplo: reconhecer a conservação ou modificações de medidas dos lados e perímetro; calcular a área de ampliação ou redução de polígonos; compor e decompor figuras, além de fazer generalizações a partir de leis ou relações definidas como semelhanças e diferenças em aspecto observáveis do objeto. Todas essas situações estão relacionadas com os estudos da simetria.

## 2.2 Isometria e Simetria

Os conceitos a seguir delineados e desenhados são definidos de forma intuitiva, e dentro de uma linguagem não muito rebuscada, para atender o entendimento dos leitores mais simples, como alunos da educação básica.

Para a maioria das pessoas, a noção de simetria está

ligada mais a pensamentos sobre Arte e Natureza do que sobre Matemática. De fato, nossas ideias de beleza estão intimamente relacionadas aos princípios de simetria e são encontradas por toda a parte no mundo que nos rodeia.

Embora seja fácil reconhecer e compreender simetrias intuitivamente, é um pouco mais complexo defini-la em termos matemáticos mais precisos. No entanto, no plano, a ideia básica é bastante clara: uma figura no plano é simétrica se podemos dividi-la em partes de alguma maneira, de tal modo que as partes resultantes desta divisão coincidam perfeitamente, quando sobrepostas. Simetria apresenta ainda conformidades de tamanho, forma e posição entre as partes de um todo; harmonia resultante de certas combinações e proporções regulares. Entretanto, acreditamos que a ideia de simetria está de algum modo ligado às transformações geométricas, especialmente às isometrias, pois a simetria de uma figura é algo mais do que uma transformação geométrica.

Isometria é uma transformação geométrica em que são conservadas as medidas de comprimento dos segmentos de reta e as medidas de amplitude dos ângulos.

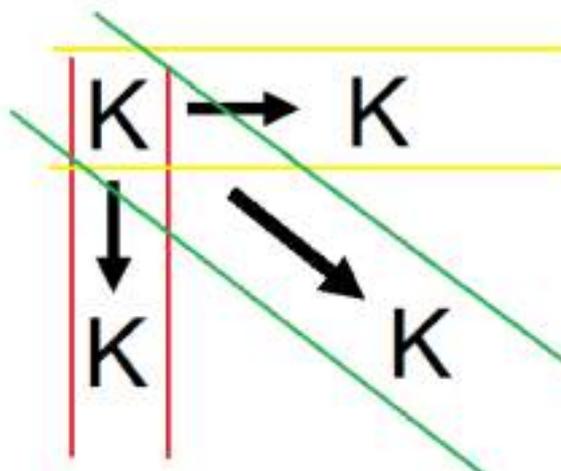
Trataremos de quatro tipos de Isometrias:

1. Translações
2. Reflexões
3. Rotação
4. Reflexão deslizante

### 2.2.1 Isometria de translação

A translação de um objeto acontece quando deslocamos uma figura a uma distância numa determinada direção e sentido, sem girá-lo ou refleti-lo (figura.2), com isso obtemos mais de uma imagem definindo-a semelhante. Este movimento se assemelha a um deslizar.

**Figura 2:** Movimento de translação



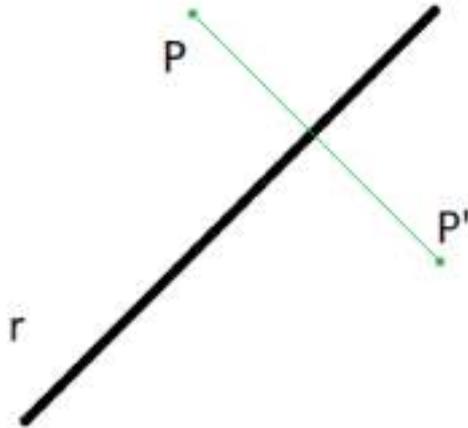
**Fonte:** Autores

Se arrastarmos a letra K na horizontal, vertical ou diagonal, sem a levantarmos do plano, a sua imagem mantém-se invariante.

### 2.2.2 Simetria de reflexão

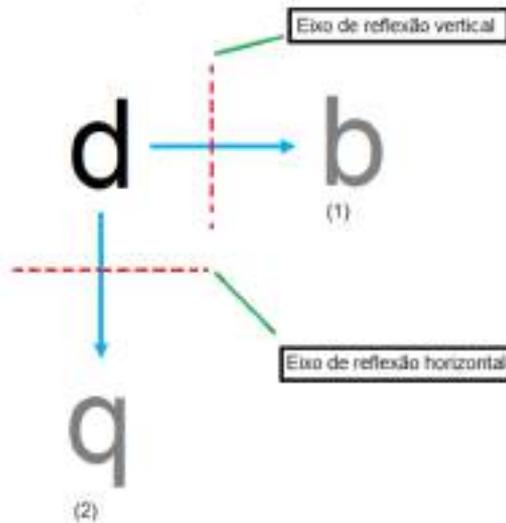
Reflexão de eixo  $r$ , é a transformação geométrica que deixa invariantes todos os pontos da reta  $r$  e que, a cada ponto  $P$  que não pertença a  $r$  faz corresponder um ponto  $P'$ , chamado transformado de  $P$ .

**Figura 3:** Reta  $r$  sendo eixo de reflexão e ponto  $P'$  é o transformado de  $P$



Fonte: Autores

**Figura 4:** Reflexão da letra “d”



Fonte: Autores

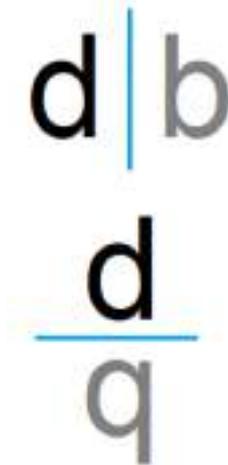
No caso (1), a letra d seria a imagem refletida no espelho se o posicionássemos sobre a linha vertical tracejada – eixo de

reflexão. No caso (2) a letra d transforma-se em q através de uma reflexão em relação ao eixo horizontal, isto é, gerou uma imagem em espelho.

Este eixo pode ser posicionado em várias posições. Nesses exemplos aplicou-se um eixo de reflexão vertical e um eixo de reflexão horizontal.

### 2.2.3 Propriedades da reflexão

**Figura 5:** Reflexo de d



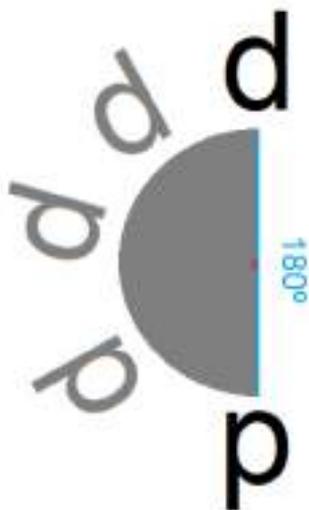
1. A reflexão de uma figura em relação a um eixo de reflexão faz corresponder a cada ponto A um ponto A' (imagem ou transformado de A);
2. Cada ponto e sua imagem estão a mesma distância e medida na perpendicular do eixo de reflexão;
3. A imagem de um ponto do eixo é o próprio ponto;
4. A reflexão inverte a orientação da figura;

**Fonte:** Autores

### 2.3 Simetria de Rotação

Simetrias centrais e rotacionais são aquelas em que um ponto, objeto ou parte de um objeto podem ser girados em relação a um ponto fixo, central, chamado centro da simetria, de tal maneira que essas partes ou objetos coincidam um com o outro um determinado número de vezes. A figura original é transformada em outra figura igual, e todos os seus pontos estão à mesma distância do ponto de rotação que os pontos originais. A rotação é feita de acordo com um determinado ângulo, podendo ocorrer nos sentidos horário ou anti-horário.

**Figura 6:** Objetos simétricos em relação ao centro



**Fonte:** Autores

### 2.3.1 Propriedades da Rotação

1. Para fazer a rotação temos de conhecer a amplitude e o sentido do ângulo de rotação, bem como o centro de rotação;
2. Numa rotação, um ponto e a sua imagem estão à mesma

distância do centro de rotação; quando o centro de rotação é um ponto da figura, a sua imagem é o próprio ponto.

Figura 7: Objetos

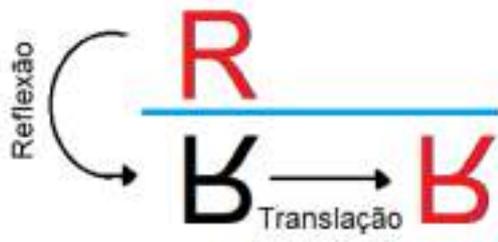


**Fonte:** Autores

#### 2.4 Reflexão Deslizante

As reflexões deslizantes são uma transformação geométrica com uma translação com um vetor com a mesma direção da reta de reflexão, ou seja, uma reflexão segundo um eixo e seguida de um deslocamento com a direção deste eixo.

**Figura 8:** R sofrendo uma reflexão deslizante



**Fonte:** Autores

É importante na Matemática conhecermos alguns

movimentos e propriedades que podemos usar de suporte para entendermos padrões de pavimentações como os definidos nas obras de Escher, um dos mais famosos artistas gráficos do mundo, que explorou na sua arte conceitos da geometria plana e espacial. Essas propriedades e movimentos são estudados em Matemática com o nome de isometria.

Assim, os estudos aqui propostos por meio da relação das obras de Escher e a Matemática têm em sua base na transdisciplinaridade, na Matemática cultural, na prática social, e nas conexões que os conteúdos de geometria e simetria podem fazer na sala de aula. Nesse entendimento, nós nos apoiamos em D'Ambrósio que assinala que:

O essencial na transdisciplinaridade reside numa postura de reconhecimento de que não há espaço e tempo culturais privilegiados que permitam julgar e hierarquizar, como mais correto ou mais certo ou mais verdadeiro, complexos de explicação e convivência com a realidade que nos cerca. A transdisciplinaridade repousa sobre uma atitude aberta, de respeito mútuo, sobre mitos, religiões e sistemas de explicações e conhecimentos, rejeitando qualquer tipo de arrogância e prepotência. A transdisciplinaridade é, na sua essência, transcultural. Exige a participação de todos, vindo de todas as regiões do planeta, de tradições culturais, formação e experiência profissional as mais diversas. (D'AMBROSIO, 2008, p. 16).

Com essa compreensão transdisciplinar, o ensino de Geometria, situa-se, ainda, na realização de atividades exploratórias do espaço. Assim, deslocando, e manipulando formas, os alunos percebem as conexões dos objetos e o uso de direções. Porém, vale destacar a importância de os alunos serem motivados a trabalhar com representações de figuras em um plano tridimensional, possibilitando que os mesmos as produzam e interpretem-nas.

### **3 Maurits Corlelis Escher**

A seguir abordaremos uma breve história de vida de Escher (figura 9) e dos trabalhos que utilizam técnicas de transformações isométricas para compreender a relação de suas obras com o ensino da simetria.

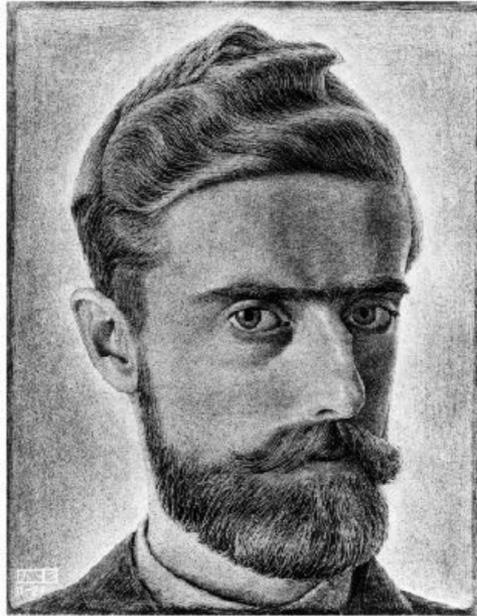
#### **3.1 A Vida de Escher**

Escher nasceu na Holanda, na cidade de Leeuwarden em 1898, era o filho caçula de quatro irmãos de um engenheiro civil. Aos cinco anos se mudou com sua família para Arnhem, onde passou a maior parte de sua juventude.

Escher nunca demonstrou interesse pelos estudos, porém por influência da família entrou para a escola de arquitetura e Artes decorativas de Haarlem.

Segundo Fainguelernt e Nunes (2006), as obras de Escher eram dotadas de sensibilidade e precisão técnica. Escher era notável no campo da geometria, sua especialidade era trabalhar o plano com revestimentos de mosaicos figurativos, cuja inspiração ocorreu através de observações dos mosaicos árabes, feitos pelos mouros. Em suas gravuras, aplicava conceitos fundamentais da Matemática de forma intuitiva: simetria, translação e padrões de repetição. A Matemática sempre esteve presente em suas obras, quer seja pela simetria, pelas proporções, pela semelhança do conceito de fractal, sua concepção de geometria hiperbólica ou pela perspectiva.

**Figura 9:** Maurits Cornelis Escher (1898-1970)



**Fonte:** Google

Escher faleceu em 1972, deixou livros ilustrados, tapeçarias, selos postais e murais, 448 litografias, xilogravuras e gravuras em madeira e mais de 2000 desenhos e esboço. Sua arte é apreciada por milhões de pessoas hoje em todo o mundo.

Escher foi um artista gráfico, que ficou muito conhecido por suas obras apresentarem características peculiares sobre temas como construções impossíveis, metamorfoses e exploração do infinito, o que gerou reconhecimento no aspecto artístico. Porém do ponto de vista matemático o que chama atenção em alguns de seus quadros, é a técnica desenvolvida pelo artista para trabalhar com simetrias, através de transformação isométrica, o que será descrito a seguir.

### 3.2 Obras de Escher e a Matemática

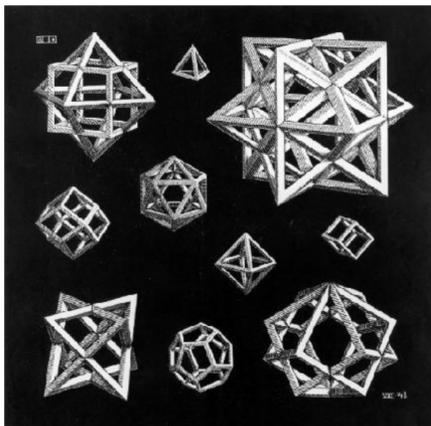
Do ponto de vista matemático, a obra de Escher apresenta características marcantes. Segundo Fainguelernt e Nunes (2006) o método desenvolvido pelo artista em suas obras tem muita influência da geometria, dando efeitos e seguindo determinados padrões, principalmente ligados a simetria, o que proporciona ao público uma sensação de equilíbrio e precisão técnica.

Embora não tenha se especializado na área das ciências exatas, a Matemática ampliou a percepção e o conhecimento do artista, possibilitando-o a explorar seu trabalho gráfico, aplicando fundamentos matemáticos como, as transformações isométricas de reflexão, translação e rotação e reflexão deslizante, no qual se tornou especialista.

Schattschneider e Walker (1991) argumentam que os desenhos simétricos de Escher usados em superfícies planas formam figuras espaciais ao serem dobrados, e em alguns casos suas estruturas se transformam em um círculo tridimensional de tetraedros, que ao sofrer uma rotação, suas estruturas se deformam, e segundo os autores, se assemelham ao desabrochar de uma flor.

A figura 10 representa uma xilogravura de Escher sobre estrelas, e nota-se muita semelhança com sólidos geométricos.

**Figura 10:** Estudo para estrelas – Escher – gravura em madeira 1948



**Fonte:** Google

De acordo com as características que suas obras apresentam, fica evidente que muitas de suas inspirações se deram por conta da Matemática. E o mesmo afirma sobre ela:

A Matemática é um portão aberto. Desse portão partem muitos caminhos que se ramificam por um jardim. Quando penso já haver percorrido todos eles e retratado todas as vistas desse jardim, acabo encontrando um novo caminho, que permite outras descobertas (ESCHER, 1994 p. 25-26).

No desenvolvimento acadêmico, segundo Berro (2008), os desenhos de Escher podem ser associados ao material proposto pelo plano nacional de ensino, relacionado ao estudo da simetria, geometria e aproximações ao infinito.

Joly (2002) analisou as obras de Escher e produziu argumentos didáticos em sua dissertação, complementando com conteúdo tais como, sequências numéricas, progressões aritmética e geométrica.

No ensino básico, pode-se desenvolver trabalhos que

abordem conceitos matemáticos como, congruência e figuras relacionadas entre si, por meio de reflexões, rotações, translações ou reflexões deslizantes.

### 3.3 Obras Simétricas de Escher

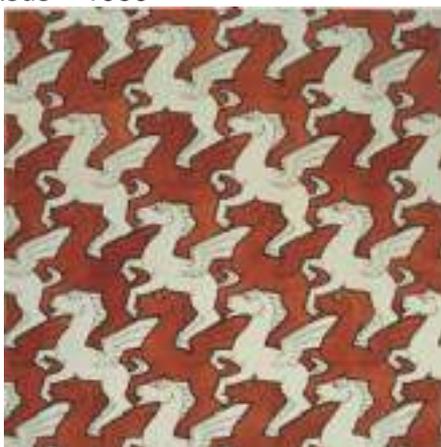
Classificamos suas obras de acordo com o objetivo do trabalho, com foco nas transformações isométricas. As imagens a seguir mostram a técnica de tesselação (ou ladrilhamento) desenvolvida por Escher através dessas transformações.

#### 3.3.1 Translação

A figura 11 representa uma transformação denominada translação, termo usado para “mover” formas, sendo necessárias duas especificações, a direção, que pode ser medida em graus e a magnitude que pode ser medida em unidades de comprimento.

Nota-se uma divisão regular no plano de uma figura, no qual os tons de cores se alternam seguindo um determinado padrão, possibilitando visualizar a transformação aplicada.

**Figura 11:** Pegasus – 1959



**Fonte:** Google

A figura 12 representa uma divisão regular no plano de duas figuras iguais, no qual as mesmas passam também pelo processo de translação.

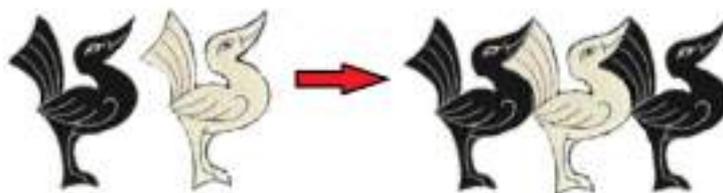
**Figura 12:** Pássaro – Escher - 1967



Fonte: Google

A figura 13 mostra o padrão que o artista utiliza na realização do quadro. Nessa imagem podemos observar o deslocamento do desenho, sem interferência em seu centro de rotação. A interferência acontece na posição que a imagem se desloca, vertical, horizontal e diagonal.

**Figura 13:** Processo de translação



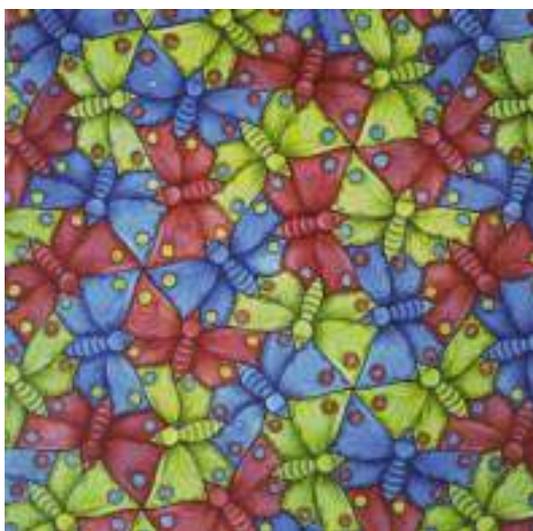
Fonte: Autores

### 3.3.2 Rotação

O movimento de rotação em uma imagem acontece quando há um “giro”, sentido horário ou anti-horário ao redor de um ponto da figura, chamado centro de rotação. A distância do centro de rotação se mantém constante e a medida do giro é chamado ângulo de rotação.

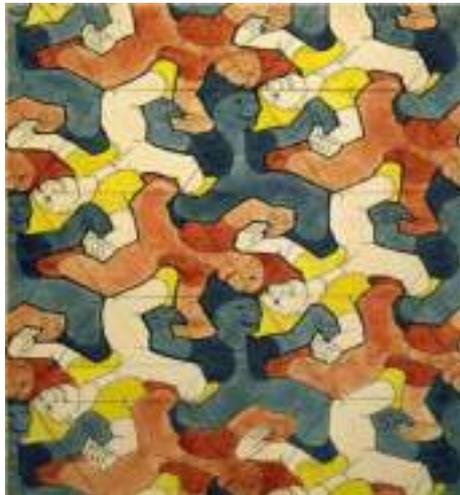
As figuras 14 e 15 representam a técnica de rotação utilizada pelo autor, e as imagens se movimentam de acordo com o eixo de rotação de cada uma.

**Figura 14:** Borboleta 1948



Fonte: Google

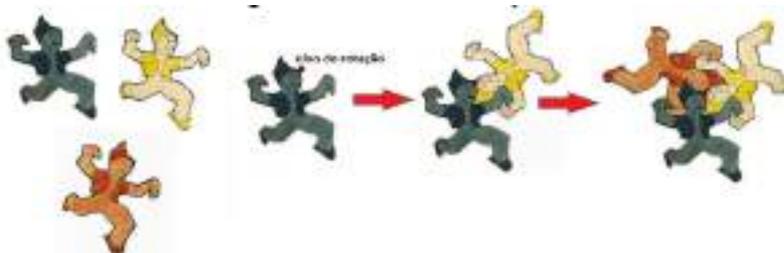
**Figura 15:** Palhaço - Escher – 1938



**Fonte:** Google

A figura 16 retrata a técnica utilizada pelo artista, para criar o efeito de rotação em seus trabalhos. Nesse caso, são três desenhos iguais, porém o que distingue um do outro é posição angular onde cada um se encontra. O amarelo rotacional  $135^\circ$  graus anti-horário sobre o eixo de rotação e o marrom  $225^\circ$  graus anti-horário também sobre o mesmo eixo de rotação.

**Figura 16:** Processo de rotação



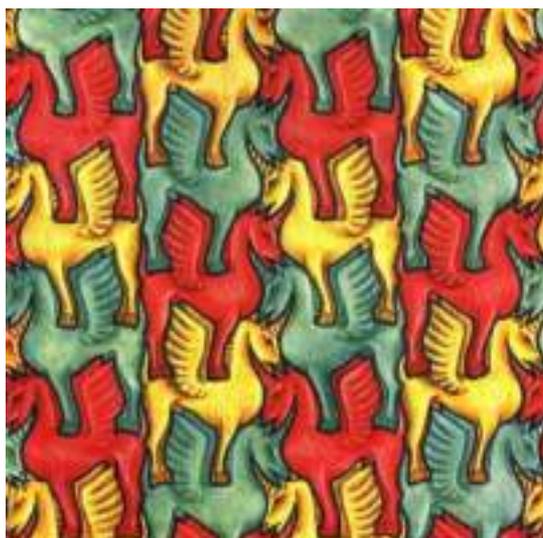
**Fonte:** Autores

### 3.3.3 Reflexão

A reflexão de uma imagem ocorre através de um eixo e o ponto central da imagem original, se equivale a mesma distância do ponto central da imagem refletida em relação ao eixo de reflexão.

As figuras 17 e 18 mostram essa técnica que se assemelha a um reflexo no espelho, complementando com a divisão regular no plano.

**Figura 17:** Unicórnio – 1950



Fonte: Google

**Figura 18:** Cavaleiro - Escher – 1946



Fonte: Google

A figura 19 demonstra com clareza a técnica que o autor utiliza, no qual a imagem escura se equivale a original e a mais clara ao reflexo. A ideia de tons de cores diferentes nas imagens é justamente mostrar o efeito da reflexão.

**Figura 19:** Processo reflexão



Fonte: Autores

### 3.3.4 Reflexão deslizante

Resulta da translação e reflexão onde os mesmos

elementos são necessários, eixo, direção e magnitude.

A figura 20 representa exemplo de imagem de reflexão deslizante, onde as águias com cores iguais representam suas respectivas reflexões, porém deslocadas por conta da translação, como observado na imagem.

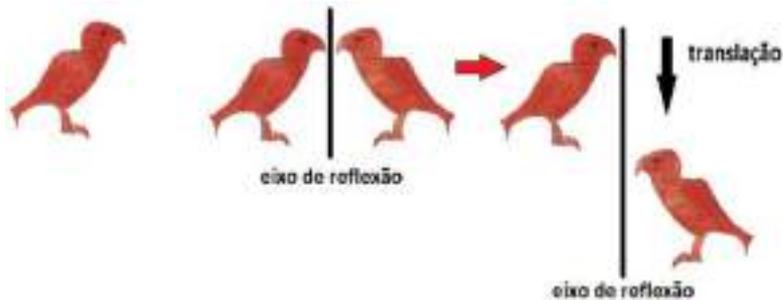
**Figura 20:** Águia – Escher – 1938



**Fonte:** Google

A figura 21 mostra a característica da técnica reflexão deslizante utilizada por Escher, e o desenho da águia vermelha representa o movimento das três águias, azul, branca e vermelha, indicando um padrão a cada duas linhas na obra.

**Figura 21:** Esquema da reflexão deslizante



**Fonte:** Autores

É importante ressaltar que as transformações isométricas originais são: translação, rotação e reflexão, e a partir delas podemos obter transformações derivadas como é o caso da reflexão deslizante.

As atividades, devem partir da observação e identificação dessas transformações nas obras de Escher. Assim, o estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) constituem o ponto de partida para a construção das noções de congruência e simetrias.

## 4 Metodologia

### 4.1 Objetivos

Desenvolver nos alunos o sentido espacial por meio de atividades que enfatizam a visualização; resolver problemas envolvendo a compreensão de relações espaciais, distinguir as transformações de figuras congruentes que se relacionam por meio de reflexões, rotações, translações ou reflexões deslizantes. Observar as transformações isométricas que ocorrem nos trabalhos da última fase de Escher; desenvolver atividades que desvendem e

repliquem as respectivas transformações.

#### 4.2 Justificativa

Reconhecimento do espaço físico ao desenvolver a observação e a percepção de semelhanças, diferenças e regularidades. Conexão com outras áreas da Matemática e com outros campos do conhecimento, especialmente com a arte, por meio da exploração das formas e características de objetos, obras artísticas, pinturas, desenhos, mapas, formas encontradas na natureza, entre outras criações humanas ou naturais.

#### 4.3 Participantes

As atividades foram realizadas com alunos de 8º e 9º anos em duas escolas de ensino público, localizadas em Franca-SP.

#### 4.4 Material

Os materiais utilizados na oficina foram: papel cartão, cartolina, régua, lápis, borracha, tesoura, fita adesiva e lápis de colorir. As cartolinas foram utilizadas para fazer a tesselação, uma para cada aluno.

#### 4.5 Instrumento

Aplicações de atividades práticas de tesselação, utilizando os fundamentos e conceitos extraídos das técnicas utilizadas por Escher, com o objetivo de trabalhar os conceitos de simetria e as transformações isométricas.

#### 4.6 Atividade Prática: Desvendando Escher

É possível explorar vários assuntos relacionados ao ensino de Geometria, de uma forma criativa e atraente, através de atividades que envolvem tesselação, corresponde ao vocábulo tessela, que indica a pavimentação ou ladrilhamento de uma região através de peças de mosaico.

As tesselações do plano se constituem num recobrimento do mesmo, sem deixar lacunas ou sobreposições.

A escola, em particular a sala de aula de Matemática, é o lugar no qual as crianças precisam ser preparadas para o mundo de amanhã, especialmente nos aspectos tecnológicos (ERNEST, 1991, p. 13).

A apresentação das atividades teóricas e práticas para os alunos, foram desenvolvidas numa primeira etapa com tecnologias digitais como o *Powerpoint* e o *data show*, no intuito de agilizar a explicação do conteúdo, além da visualização e compreensão dos passos a serem realizados com a finalidade de integrar e estabelecer relações entre duas áreas do conhecimento.

Na segunda etapa, organizamos a sala em grupos de três alunos, apresentada a proposta de realizar uma atividade para trabalhar as transformações isométricas na composição de um desenho, o qual se tornará o molde para a aplicação das técnicas de Escher. A figura 22 mostra o ambiente característico da oficina no que se refere ao espaço de trabalho, organização dos alunos e materiais de suporte.

**Figura 22:** Atividade prática



**Fonte:** Autores

#### 4.6.1. Aplicações da técnica de Escher

A técnica desenvolvida por Escher em seus desenhos são aplicações das transformações isométricas em polígonos regulares. As atividades a seguir, mostram a técnica sendo aplicada em um triângulo equilátero e em um quadrado.

Para a realização da técnica utilizamos como materiais: papel cartão, fola de sulfite branca, régua, lápis preto, borracha, tesoura, fita adesiva e lápis de colorir. A folha de sulfite branca foi utilizada para fazer a tesselação.

##### 4.6.1.1 Atividade 1- triângulo equilátero: rotação

A primeira etapa da técnica consiste em criarmos um molde do desenho que desejamos para contornar na folha de sulfite. Para

isso, no papel cartão cortamos um triângulo equilátero de 9cm de lado.

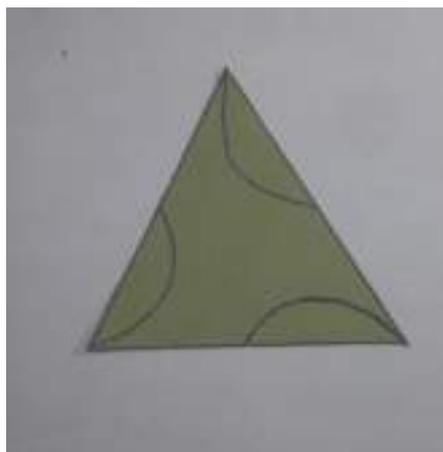
**Figura 23-a:** Triângulo equilátero no papel cartão



**Fonte:** Autores.

Em seguida desenhamos aleatoriamente no triângulo um desenho para aplicar a transformação isométrica desejada.

**Figura 23.b:** Traços marcados no triângulo



**Fonte:** Autores

Após desenharmos, recortamos a figura em cima da linha demarcada.

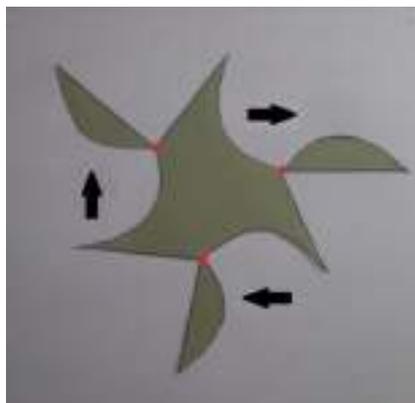
**Figura 23-c:** Recorte da área demarcada



**Fonte:** Autores

Ao aplicar a transformação isométrica de rotação, identificamos um ponto destacado em vermelho, chamado centro de rotação, através dele a figura recortada sofre a mudança de posição.

**Figura 23-d:** Representação do eixo de rotação e do movimento da figura recortada.



**Fonte:** Autores

Após a aplicação da transformação isométrica, o que antes era um triângulo equilátero, acaba de ganhar um novo formato. Essa nova forma representa a nosso molde.

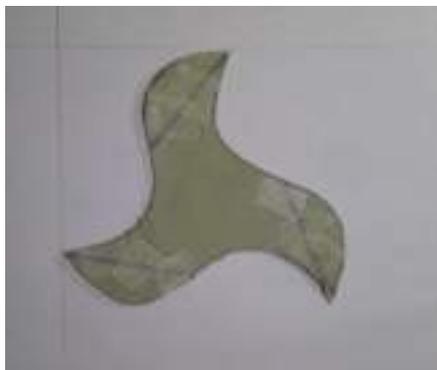
**Figura 23-e:** Formato da moldura



**Fonte:** Autores

Ao conseguir fixar as partes soltas da figura com fita adesiva, escolhemos aleatoriamente um local da folha de sulfite branca de 2cm de margem para começarmos a contornar a figura.

**Figura 24-a:** Início do contorno na folha de sulfite



**Fonte:** Autores

No desenvolvimento do trabalho, deve-se ressaltar que o molde se encaixa perfeitamente nos detalhes do contorno, que indicam automaticamente o padrão a ser seguido, isto é, dá-se o início da tesselação ou ladrilhamento.

**Figura 24-b:** Processo da tesselação



**Fonte:** Autores

A figura 24-b representa a tesselação quase completa, onde todos os espaços dentro da margem da folha estão preenchidos pelo contorno do molde.

**Figura 24-c:** Finalizando a tesselação



**Fonte:** Autores

Destacamos com uma caneta de tinta azul os contornos do desenho, para uma melhor visualização do efeito causado pela técnica de Escher.

**Figura 24-d** Tesselação completa



**Fonte:** Autores

A figura 25 representa o quadro finalizado, onde os autores utilizaram lápis colorido para pintar os desenhos de maneira autônoma, sem qualquer exigência de pintura. É interessante notarmos o efeito causado pela técnica, onde percebemos de maneira clara um determinado padrão, consequência da técnica utilizada.

**Figura 25:** Quadro pronto.



**Fonte:** Autores

#### 4.6.1.2 Atividade 2- Quadrado: translação

A figura 26 mostra o resultado da mesma técnica aplicada anteriormente, porém o polígono que operamos é o quadrado, onde o procedimento e os materiais utilizados foram os mesmos do triângulo. Contudo a transformação isométrica utilizada na construção do molde é a de translação, onde os dois tons de cores causam um efeito que nos dá uma sensação de que a figura está sendo deslocada.

**Figura: 26:** Quadro translação



**Fonte:** Autores

Observação: É importante esclarecer que para uma alta qualidade e precisão técnica nos quadros, os polígonos regulares bases do molde da figura deve apresentar medidas extremamente precisas e bem calculadas, também, dependendo da transformação isométrica aplicada no molde, terá o efeito explícito no quadro final.

Os alunos foram desenvolvendo seus respectivos moldes, primeiro dobrando o papel cartão no formato de um quadrado, em seguida escolhendo alguns dos desenhos propostos na lousa para criarem os moldes da tesselação.

Após os alunos efetuarem os traços, os mesmos recortaram sobre os traços e utilizaram transformações isométricas para compor os desenhos, colando com fita adesiva as partes modificadas, finalizando o molde como se observa na figura 27.

**Figura 27:** Transformações isométricas na construção de molduras



Fonte: Google

Na segunda etapa, com os moldes finalizados os alunos foram orientados a fazer uma margem de cinco centímetros na cartolina simulando uma moldura, assim quadros com estrutura

semelhantes aos de Escher foram tomando forma.

Em seguida os alunos apoiaram os moldes na cartolina e começaram a contornar o desenho e interligando-os respectivamente, os alunos foram percebendo que ao se dispor os moldes seguindo a transformação isométrica pré-estabelecida, no caso a translação, os desenhos iam se encaixando dando o efeito que denominamos tesselação. A figura 28 mostra alguns dos desenhos desenvolvidos pelos alunos em sala.

**Figura 28:** Tesselação desenvolvida pelos alunos e com monitores



**Fonte:** Autores

## 5 Resultados

Após a tesselação completa, surgiram trabalhos muito interessantes, pois os alunos tiveram a liberdade artística de decorar os desenhos de acordo com suas características, complementando com o efeito produzido pela simetria, dando aspecto padronizado através das transformações isométricas.

A maior dificuldade apresentada pelos alunos foi entender as regras da moldura para poder elaborar o quadro, somente a partir das técnicas iniciais apresentadas nas figuras 23 é que conseguimos aplicar a técnica de Escher.

As dúvidas foram sendo dirimidas ao longo da prática e os conceitos equivocados sendo esclarecidos, uma vez que estivemos à disposição interagindo constantemente e estimulando a autonomia dos alunos por meio de questionamentos, evitando dar respostas prontas para suas dúvidas.

## **6 Considerações Finais**

A geometria permite uma leitura de mundo, por meio de relações que podem ser construídas entre o espaço e o indivíduo

Esta área do conhecimento é de grande valor para a formação do indivíduo por ela estar presente nas mais variadas situações da vida cotidiana, como na natureza, nos objetos que em utilizamos, nas construções e nas artes.

Vale salientar que as atividades partiram da observação e identificação dessas transformações nas obras de Escher. Assim, o estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) se constituiu no ponto de partida para a construção das noções de congruências e simetrias e esperamos que no futuro se possa relacioná-las com as transformações isométricas que ocorrem em gráficos de determinadas funções.

Nosso interesse esteve voltado para as simetrias no ensino de Geometria. O estudo do espaço físico e dos entes geométricos desenvolve habilidades de percepção e criação.

Ao propor as atividades de tesselação esperamos ter contribuído para despertar o interesse dos alunos e possibilitar que os conceitos geométricos tenham aplicação prática, podendo ser “manipulados” e melhor compreendidos e dessa forma, poder colaborar para que o ensino de Geometria não se limite a definições e classificações, mas que, em associação com a arte, desperte o interesse do aluno pela exploração do espaço que o cerca, desenvolvendo sua autoconfiança e criatividade.

## Referencias

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta Caecilia. História da Matemática. Tradução de Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blücher, 2012.

BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

D'AMBRÓSIO, B. S. Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. In: Pró-posições, v. 4, n.1, 1993, p. 35-41

D'AMBROSIO, U. Transdisciplinaridade. São Paulo: Palas Athenas, 1997.

ENRIGHT, Carolyn. Técnicas de Arte no Egito Antigo. 2013. Disponível em: [http://www.ehow.com.br/tecnicas-egito-antigo-info\\_6935/](http://www.ehow.com.br/tecnicas-egito-antigo-info_6935/) Acesso em: 20 set. 2018.

ERNEST, Paul. Mathematics Teaching: The State of the Art. New York: The Falmer Press. 1991.

ESCHER, Maurits Cornelis. M. C. Escher, Gravuras e Desenhos. Germany: Taschen, 1994, p. 25-26.

FAINGUELERNT, Estela Kaufmann e NUNES, Kátia Regina Ashton. Fazendo Arte com a Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2006, p. 22-28.

JOLY, Larissa Fiedler. Matemática e Arte: Um Estudo de Sequências e Progressões como Modelo para a Construção Teórica da Estética da Matemática. Dissertação de Mestrado em Educação. Curitiba: UFPR, 2002.

PRETTE, Maria Carla; GIORGIS, Alfonso de. Atlas Ilustrado da História da Arte. Girassol Edições, 2007, p. 26.

ROONEY, Anne. A História da Matemática: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

ROSA, Augusto Pereira da; ZINGANO, Ester Miriane. Pré-História: educação para sobrevivência. Maiêutica, Rio Grande do Sul, n. 1, p. 33-37, jan. 2013.

SCHATTSCHEIDER e WALKER. Caleidociclos de M. C. Escher. Berlim: Taschen, 1991, p. 6-18.

## **POLÍTICAS PÚBLICAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NO ESTADO DE SÃO PAULO**

Heloisi Araújo Prates de Lima

Larissy Batista Cintra

Orientadora: Prof<sup>fa</sup>. Dr<sup>a</sup> Sílvia Regina Viel

**Resumo:** O presente artigo teve como objetivo refletir sobre as políticas públicas educacionais do Estado de São Paulo, mostrando as propostas curriculares de Matemática. Foi feito um levantamento de provas aplicadas ao longo dos anos (2007 à 2017) e alguns dos resultados obtidos através do SARESP de 2017. As propostas curriculares são responsabilidade da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, desta forma, de acordo com os resultados obtidos cabe ao órgão tomar providências que melhor atendam às necessidades educacionais. Este trabalho buscou contribuir com as discussões sobre ensino-aprendizagem de Matemática nas escolas públicas do Estado de São Paulo. Percebeu-se que novas iniciativas devem ser criadas para uma análise mais profunda da situação e da aprendizagem, sobretudo no que diz respeito a sala de aula de Matemática.

**Palavras-chave:** Avaliação. Currículo. Educação. Matemática. Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

### **1 Introdução**

O desempenho em Matemática dos alunos no passado recente e no presente nos motivou a pesquisar como são feitas as Propostas Curriculares e trabalhados os resultados das avaliações educacionais nos Ensinos Fundamental e Médio no Estado de São Paulo, em relação à Matemática.

Num artigo recente Oliveira (2010, p.8) afirma que “entende-se por políticas públicas educacionais aquelas que regulam e orientam os sistemas de ensino, instituindo a Educação escolar”.

As Propostas Curriculares são de extrema importância

para o sistema público educacional, pois são elas que direcionam as habilidades, competências e materiais que devem ser utilizados. Essas também têm uma influência significativa no resultado do ensino-aprendizagem, por ser a partir delas que as unidades escolares se organizam e a dinâmica em sala de aula é estabelecida.

O objetivo deste artigo é refletir sobre as políticas públicas educacionais no Estado de São Paulo, mostrando as Propostas Curriculares de Matemática, as formas atuais de avaliações externas e alguns dos resultados obtidos através dessas avaliações.

É importante entender como são determinadas algumas atividades governamentais e ter conhecimento dos direitos educacionais que é concedido a todos.

## **2 Políticas públicas educacionais**

Antes de saber o que são as políticas públicas educacionais, deve se saber o significado de cada uma dessas palavras separadamente.

Política pública é uma expressão que visa definir uma situação específica da política. (...). A melhor forma de compreendermos essa definição é partirmos do que cada palavra, separadamente, significa. Política é uma palavra de origem grega, politikó, que exprime a condição de participação da pessoa que é livre nas decisões sobre os rumos da cidade, a pólis. Já a palavra pública é de origem latina, publica, e significa povo, do povo (OLIVEIRA,2010, p. 1).

De acordo com Lenzi (s/d), as políticas públicas da Educação são ações governamentais que visam garantir ensino para todos, essas também devem avaliar e procurar melhorar a qualidade de ensino. Estas políticas são estudadas e desenvolvidas através de leis que são decididas pelo poder legislativo, e o poder executivo também pode apresentar medidas para que visem

contribuir. A população também tem total direito de expor suas opiniões, essas podem ser expostas em conselhos de políticas públicas, destes participam representantes do governo e cidadãos.

Exemplos de políticas públicas educacionais que foram estabelecidas recentemente, 2007, no Estado de São Paulo, instituíam e recomendavam algumas metas:

Com Castro, o governo José Serra estabeleceu metas para a educação a serem atingidas até o final do mandato em 2010 e que podem assim ser sintetizadas: todos os alunos de 8 anos plenamente alfabetizados; redução de 50% das taxas de reprovação da 8ª série; redução de 50% das taxas de reprovação do Ensino Médio; implantação de programas de recuperação de aprendizagem nas séries finais de todos os ciclos de aprendizagem do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio; aumento de 10% nos índices de desempenho Nuances: estudos sobre Educação. do Ensino Fundamental e Médio nas avaliações nacionais e estaduais; atendimento de 100% da demanda de jovens e adultos de Ensino Médio com currículo profissionalizante diversificado; implantação do ensino fundamental de nove anos, com prioridade à municipalização das séries iniciais (1ª a 4ª séries); programas de formação continuada e capacitação da equipe; descentralização e/ou municipalização do programa de alimentação escolar nos 30 municípios ainda centralizados e programa de obras e melhorias de infraestrutura das escolas (SANFELICE, 2010, p. 148).

Ainda em 2007 foram propostas algumas ações:

Dentre as principais ações a serem tomadas propôs-se: implantação do Projeto Ler e Escrever usando universitários bolsistas atuando como professor auxiliar nas séries iniciais de alfabetização para apoiar o professor regente e aprimorar sua formação profissional no âmbito do trabalho; implantação de ciclos de 2 anos no primeiro e segundo segmento do Ensino Fundamental; divulgação das propostas curriculares e expectativas de aprendizagem para todas as séries e disciplinas do Ensino Fundamental e Médio; recuperação intensiva ao

término do 1º e 2º ciclos, na 8ª série e ao final do Ensino Médio; diversificação curricular do Ensino Médio com uma base comum de conteúdos e competências e habilitações técnicas profissionalizantes; parcerias com o setor privado para certificações em computação e língua estrangeira; política de municipalização de 1ª a 4ª séries com controle de qualidade com vistas à implantação do Ensino Fundamental de 9 anos; a boa gestão, cumprimento das metas, ganhará incentivos na remuneração da equipe de profissionais; 100% das escolas receberão laboratórios de informática, materiais de apoio ao ensino de ciências e as salas dos professores terão computadores, impressora e ambientes de multimídia (SANFELICE, 2010, p. 149).

O autor Sanfelice (2010, p. 149) observa que “No rol das medidas previstas destaca-se a criação da função professor coordenador e o fortalecimento do papel do diretor da escola na liderança do processo de implantação do modelo de gestão”.

Das metas, ações e medidas propostas em 2007 tiveram como resultado em 2009 e 2010:

Então, o que temos no momento em pauta na política educacional paulista é o projeto “São Paulo Faz Escola” baseado na “Nova Agenda da Educação Pública do Estado de São Paulo” que se constitui daqueles itens listados anteriormente como ações para uma escola melhor. Um dos itens refere-se à divulgação das propostas curriculares e expectativas de aprendizagem para todas as séries e disciplinas do Ensino Fundamental e Médio. De fato, gradativamente vem se materializando a nova proposta curricular na rede estadual (SANFELICE, 2010, p. 150).

As políticas públicas educacionais norteiam a Educação, as metas traçadas servem como estímulo para que durante o processo escolar haja uma regularidade de ensino, para que alunos tenham sucesso na aprendizagem dos conteúdos das disciplinas, e que todos tenham acesso aos conhecimentos importantes e necessários. Quanto aos professores, além de norte para o seu

trabalho, as políticas apontam as prioridades e os próximos passos no desenvolvimento de programas, projetos e metas.

### **3 Propostas curriculares de Matemática no Estado de São Paulo**

A primeira proposta curricular do Estado de São Paulo foi estabelecida em 1984, e posteriormente surgiram as propostas de 1994 e 2008.

Tais propostas constituíram um esforço expressivo, e em alguns sentidos pioneiro, na busca de uma aproximação entre os conteúdos escolares e o universo da cultura, especialmente no que tange às contextualizações e à busca de uma instrumentação crítica para o mundo do trabalho. Essa rica herança pedagógica sobreviveu a uma avalanche de novidades passageiras e serve agora de ponto de partida para que, incorporadas às necessárias atualizações, novos passos sejam dados para sua efetivação nas práticas escolares. Particularmente no que tange às áreas em que se organiza, a nova proposta inspirou-se na anterior, mantendo a área de Matemática como um terreno específico, distinto tanto das Linguagens quanto das Ciências Naturais (SÃO PAULO, 2008, p. 38).

De acordo com o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (2008), por que uma área específica para Matemática? Três são as razões principais desta opção. Em primeiro lugar, destaca-se o fato de que uma parte da especificidade da Matemática fica esmaecida quando ela é agregada seja ao grupo das linguagens em sentido amplo, ou seja, ao grupo das ciências. Em segundo lugar, a incorporação da Matemática à área de Ciências pode distorcer o fato de que a Matemática, mesmo oferecendo uma linguagem especialmente importante e adequada para a expressão científica, constitui um conhecimento específico da Educação Básica. Em terceiro lugar, o tratamento da Matemática como área específica pode facilitar a incorporação crítica dos inúmeros

recursos tecnológicos de que dispomos para a representação de dados e o tratamento das informações, na busca da transformação de informação em conhecimento. A Matemática passou a ser uma área específica com a proposta de 1984, por esse motivo não há informações sobre como era antes de se tornar uma área específica.

O objetivo principal de um Currículo é mapear o vasto território do conhecimento, recobrando-o por meio de disciplinas e articulando-as de tal modo que o mapa assim elaborado constitua um permanente convite a viagens, não representando apenas uma delimitação rígida de fronteiras entre os diversos territórios disciplinares.

As Propostas Curriculares foram elaboradas, testadas e por fim foram para todas as escolas do Estado de São Paulo. A primeira que tivemos acesso foi:

Elaboradas em 1982 e experimentadas em 1983, em algumas classes de quatro escolas estaduais de primeiro grau da Região Metropolitana da Grande São Paulo [...] no início do ano letivo de 1984 ele estivesse disponível aos monitores que trabalham com as classes que estão aplicando o projeto (ATIVIDADES MATEMÁTICAS ENSINO MÉDIO, 1984)

A segunda proposta foi:

O material é do projeto Experiências Matemáticas esse trabalho foi feito com professores de quinta a oitava séries do ensino fundamental, foi iniciado na rede pública estadual de São Paulo, em 1993. O projeto foi elaborado por membros da Equipe Técnica de Matemática da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas-CENP e mais dois professores convidados. Foi testado em 2320 classes, no decorrer de 1994, com a finalidade de uma avaliação mais abrangente do projeto (EXPERIÊNCIAS MATEMÁTICAS DO ENSINO FUNDAMENTAL, 1994).

Na terceira proposta foi integrado o Currículo de Matemática,

que foi proposto em 2008, pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, esse foi constituído para ser a base para as escolas do Ensino Fundamental (ciclo dois) e Ensino Médio e entrou em vigor no ano de 2011.

Também na terceira proposta pudemos observar a visão dos elaboradores sobre a Matemática e sua importância:

Os currículos escolares, em todas as épocas e culturas, têm no par Matemática– língua materna seu eixo fundamental. Gostando ou não da Matemática, as crianças a estudam e os adultos a utilizam em suas ações como cidadãos, pessoas conscientes e autônomas, consumidores ou não. Todos lidam com números, medidas, formas, operações; todos leem e interpretam textos e gráficos, vivenciam relações de ordem e de equivalência, argumentam e tiram conclusões válidas a partir de proposições verdadeiras, fazem inferências plausíveis a partir de informações parciais ou incertas. Em outras palavras, a ninguém é permitido dispensar o conhecimento da Matemática sem abdicar de seu bem mais precioso: a consciência nas ações. (CURRÍCULO DE MATEMÁTICA, 2011, p.29).

Assim, o Currículo é necessário para que haja uma Educação de qualidade e visa garantir o ensino de conteúdos considerados essenciais na Matemática. Apesar de ser evidente que são inúmeros os fatores que interferem no trabalho da sala de aula para que todas as políticas públicas sejam implementadas, também são importantes os instrumentos pelos quais essa política é avaliada.

Cientes sobre as propostas, abaixo estão as avaliações utilizadas no Estado de São Paulo para acompanhar a qualidade de ensino de Matemática.

#### **4 Acompanhamento da qualidade de ensino**

Uma das formas propostas pelo Estado de São Paulo de acompanhamento dos resultados alcançados nas salas de aula são

as avaliações externas. Essas avaliações, que visam complementar o que já é feito em sala de aula, acabam abarcando diversos fatores que influenciam a aprendizagem dos alunos, tem sido discutida e questionada, já que conclusões a partir de seus resultados devem ser relativizadas.

O sistema de avaliação atual é composto pelas seguintes avaliações: Avaliação de Aprendizagem em Processo (AAP), Índice de Desenvolvimento da Educação de São Paulo (IDESP) e Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), e com base nesse é possível decidir quais projetos permanecem, as necessitam de reforma, aqueles que devem ser eliminados da Educação e novos outros.

Os cerca de 3,7 milhões de alunos da rede estadual fazem parte da maior rede de ensino do País, que conta ainda com mais de 5 mil escolas e 198,1 mil professores. Promover ações que busquem o constante aprimoramento da qualidade do ensino oferecido a esses estudantes é o objetivo dos profissionais que atuam na Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, s/d, s/p).

Como são feitas as avaliações do Estado de São Paulo:

AAP: de acordo com o site da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo o exame é aplicado duas vezes durante o ano letivo para alunos a partir do 2º Ano do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Os resultados obtidos são usados pela Educação para orientar os educadores e desenvolver ações que atuem nas dificuldades dos alunos.

IDESP: segundo o site da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo o IDESP é um dos principais indicadores da qualidade do ensino na rede estadual paulista. Criado em 2007, o índice determina metas que as escolas devem atingir ano a ano.

SARESP: de acordo com o Site da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo o SARESP é aplicado pela Secretaria da

Educação do Estado de São Paulo com o objetivo de produzir um diagnóstico da situação da escolaridade básica paulista, visando orientar os gestores do ensino no monitoramento das políticas voltadas para a melhoria da qualidade educacional, no SARESP, os alunos do 3º, 5º, 7º e 9º do Fundamental e a 3ª série do Ensino Médio testam seus conhecimentos por meio de provas.

Na proposta de 1984 tiveram como expectativas: a qualidade de um conhecimento depende das condições nas quais ele é produzido; o aluno que participa do processo de apropriação do conhecimento matemático encara a Matemática como algo agradável e acessível; é possível melhorar a qualificação do professor com um material deste tipo; e é possível produzir, no material apresentado, modificações que correspondam às necessidades detectadas em cada sala de aula em que ele é utilizado.

Mesmo sabendo que os resultados de uma proposta de ensino acontecem à médio prazo, sobre esta época não se tem dados de avaliações usadas para que pudesse ter alguns resultados dos efeitos que a proposta teve, pois de acordo com o site da Fundação para o Desenvolvimento da Educação, o SARESP entrou em vigor em 1996, por esse motivo não é possível encontrar resultados da proposta de 1984.

Na proposta de 1994 teve como expectativas: relacionar observações do mundo real a representações (tabelas, figuras, esquemas); e relacionar estas representações a uma atividade Matemática e a conceitos.

De acordo com Santos e Sabia (2015), de 1996 a 1998 aconteceu a primeira fase do SARESP, esta tinha como característica a avaliação de entrada, pois a prova era aplicada no início do ano letivo e devia informar o desempenho dos alunos no ano anterior, já a partir do ano 2000, o SARESP mudou o seu foco para uma avaliação de saída, com a finalidade de verificar habilidades e competências adquiridas pelos alunos, como salienta

a Resolução n. 120, de 11 de novembro de 2003.

Em 2003, o SARESP passou a ser censitário para todas as escolas e alunos da educação básica. Todos os alunos dos ensinos fundamental e médio foram submetidos à aplicação da prova. No ano seguinte, o SARESP manteve a mesma estrutura e características de 2003. No ano de 2005, foram mantidos os mesmos moldes dos anos anteriores (2003 e 2004), tendo como novidade a introdução de uma prova de Matemática (SANTOS e SABIA, 2015, p. 8).

A proposta de 2011 teve como expectativas: dominar a norma-padrão da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens Matemática, artística e científica; construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas; selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representadas de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema; relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente; e recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaborar propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

No quadro a seguir estão presentes o ano da Avaliação, as quantidades de questões de Matemática, quantos alunos fizeram o SARESP nos diferentes anos escolares em que a prova é aplicada e os resultados que foram obtidos através do SARESP:

Quadro 1 – Dados do SARESP

Ano do SARESP	Quantidade de questões na prova de Matemática	Nº de alunos do 7º ano do E. F.	Resultados do 7º ano do E.F.	Nº de alunos do 9º ano do E. F.	Resultados do 9º ano do E. F.	Nº de alunos do 3º ano do E. M.	Resultado do 3º ano do E. M.
2007	30	440.556	194,1	416.642	231,5	284.618	263,7
2008	24	430.789	209,1	426.066	245,7	317.734	273,8
2009	24	431.767	214,4	431.662	251,5	326.818	268,4
2010	24	506.090	212,1	488.694	243,3	342.941	269,2
2011	24	515.494	216,6	472.525	245,2	340.690	269,7
2012	24	475.249	215,4	470.826	242,3	356.455	270,4
2013	24	431.612	214,9	475.528	242,6	348.799	269,7
2014	24	125.980	215,1	456.637	243,4	366.910	270,5
2015	24	48.153	227,4	338.723	255,5	333.260	280,8
2016	24	43.971	227,5	331.631	251,0	370.451	278,1
2017	24	61.273	228,4	282.744	256,7	373.007	278,3

**Fonte:** Elaborado pelas autoras (2018).

Legenda do quadro: nº = números, E.F. = Ensino Fundamental e E.M. = Ensino Médio.

De acordo com o site Fundação para o Desenvolvimento da Educação (2017) dos níveis de proficiência:

- Abaixo do Básico: é quando os alunos apresentam domínio insuficiente dos conteúdos, das competências e das habilidades desejáveis para o ano escolar em que se encontram.

- Básico: é quando os alunos apresentam domínio mínimo dos conteúdos, das competências e das habilidades, mas possuem as estruturas necessárias para interagir com a proposta curricular no ano subsequente.

- Adequado: é quando os alunos apresentam total domínio dos conteúdos, das competências e das habilidades desejáveis para o ano escolar que se encontram.

- Avançado: é quando os alunos apresentam domínio dos conteúdos, das competências e das habilidades acima do solicitado

para o ano escolar em que se encontram.

Quadro 2 – Classificação e níveis de proficiência de Matemática

Classificação	Nível	7° E. F.	9° E. F.	3° E. M.
Insuficiente	Abaixo do Básico	<200	< 225	< 275
Suficiente	Básico	200 a < 250	225 a < 300	275 a < 350
Suficiente	Adequado	250 a < 300	300 a < 350	350 a < 400
Avançado	Avançado	≥ 300	≥ 350	≥ 400

**Fonte:** Fundação para o Desenvolvimento da Educação (2017).

Com base nos quadros 1 e 2 pode ser feita uma análise sobre os alunos do 7° ano do Ensino Fundamental, que em 2017 fizeram a prova e não atingiram o nível básico. De 2008 a 2017 os alunos atingiram o nível suficiente básico. O 9° ano Ensino Fundamental em todos os anos que se obteve os dados atingiram o nível suficiente básico. Os alunos do 3° ano do Ensino Médio de 2007 a 2014 atingiram o nível insuficiente, abaixo do básico, e de 2015 a 2017 os alunos atingiram o nível suficiente básico. Com esses resultados pode-se perceber que infelizmente os alunos não conseguiram atingir nem o nível suficiente adequado.

Mas quais as competências Matemáticas deveriam ter sido atingidas para que um aluno estivesse no nível adequado? De acordo com Fini (2009) os alunos do 7° ano do Ensino Fundamental deveriam cumprir para que estivessem no nível suficiente adequado:

Desenvolver o raciocínio quantitativo e o pensamento funcional, isto é, o pensamento em termos de relações e a variedade de suas representações, incluindo as simbólicas, as algébricas, as gráficas, as tabulares e as geométricas. Aplicar expressões analíticas para modelar e resolver problemas. Compreender as propriedades dos objetos e a sua posição relativa e desenvolver o

raciocínio espacial por meio de construções e de formas. Construir e ampliar noções de variação de grandeza para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. Compreender e fazer uso das medidas, ou de sistemas convencionais, para o cálculo de perímetros, áreas, volumes e relações entre as diferentes unidades de medida. Ler, construir e interpretar informações de variáveis expressas em gráficos e tabelas. Fazer uso das ferramentas estatísticas para descrever e analisar dados, realizar inferências e fazer previsões. Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar os conceitos e algoritmos adequados para medidas e cálculos de probabilidade. (FINI, 2009, p.74 a 76).

Competências Matemáticas que os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental deveriam cumprir para que estivessem no nível suficiente adequado:

Desenvolver o raciocínio quantitativo e o pensamento funcional, isto é, o pensamento em termos de relações e a variedade de suas representações, incluindo as simbólicas, as algébricas, as gráficas, as tabulares e as geométricas. Aplicar expressões analíticas para modelar e resolver problemas. Compreender as propriedades dos objetos e a sua posição relativa e desenvolver o raciocínio espacial por meio de construções e de formas. Construir e ampliar noções de variação de grandeza para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. Compreender e fazer uso das medidas, ou de sistemas convencionais, para o cálculo de perímetros, áreas, volumes e relações entre as diferentes unidades de medida. Ler, construir e interpretar informações de variáveis expressas em gráficos e tabelas. Fazer uso das ferramentas estatísticas para descrever e analisar dados, realizar inferências e fazer previsões. Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar os conceitos e algoritmos adequados para medidas e cálculos de probabilidade (FINI, 2009, p. 80 a 82).

Competências Matemáticas que os alunos do 3º ano do

Ensino Médio deveriam cumprir para que estivessem no nível suficiente adequado:

Desenvolver o raciocínio quantitativo e o pensamento funcional, isto é, o pensamento em termos de relações e a variedade de suas representações, incluindo as simbólicas, as algébricas, as gráficas, as tabulares e as geométricas. Aplicar expressões analíticas para modelar e resolver problemas. Compreender as propriedades dos objetos e a sua posição relativa e desenvolver o raciocínio espacial por meio de construções e de formas. Construir e ampliar noções de variação de grandeza para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. Compreender e fazer uso das medidas, ou de sistemas convencionais, para o cálculo de perímetros, áreas, volumes e relações entre as diferentes unidades de medida. Ler, construir e interpretar informações de variáveis expressas em gráficos e tabelas. Fazer uso das ferramentas estatísticas para descrever e analisar dados, realizar inferências e fazer predições. Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar os conceitos e algoritmos adequados para medidas e cálculos de probabilidade (FINI, 2009, p.86 a 88).

Os sistemas de Avaliação fornecem os resultados das provas feitas pelos alunos e assim avaliam, relativamente, o nível de aprendizagem. É importante salientar que existem várias situações que não são levadas em conta ou se quer são captadas por esse modo de avaliar, mas de toda forma, apesar das limitações esses números apontam para uma situação preocupante.

## **5 Considerações Finais**

O propósito deste trabalho foi mostrar que há uma organização por trás de todo o processo educacional comandada pelo governo, o que chamamos de política pública da educação. Há propostas e Currículos que visam garantir uma Educação de qualidade, para que os alunos aprendam de forma sistemática

todos os conteúdos fundamentais para a sua formação.

São várias os fatores que interferem na aprendizagem dos alunos e resumi-las ao currículo é muito simplista. O que é importante enfatizar é que independente dos conteúdos, não está havendo aprendizagem satisfatória. Desta maneira seria interessante repensar o modo de execução e a estrutura das propostas, assim como também a rotina da sala de aula. Mesmo que persista o currículo atual é necessário que haja uma transformação que gere uma melhoria na qualidade do processo educacional, e que sejam implementados outros tipos de avaliações e lançados novos olhares sobre as escolas e as salas de aula, principalmente no que diz respeito à Matemática.

## Referências

FINI, Maria Inês. *Matrizes de referência para a avaliação Saresp: documento básico*/Secretaria da Educação. v.1. São Paulo. 2009. 174 p. Disponível em: <[https://saresp.fde.sp.gov.br/2009/pdf/Saresp2008\\_MatrizRefAvaliacao\\_DocBasico\\_Completo.pdf](https://saresp.fde.sp.gov.br/2009/pdf/Saresp2008_MatrizRefAvaliacao_DocBasico_Completo.pdf)>. Acesso em: 09 de junho de 2019.

LENZI, Tié. *Políticas públicas na educação: quais são e quem faz?* Disponível em: <<https://www.todapolitica.com/politicas-publicas-na-educacao/>>. Acesso em: 20 de novembro de 2018.

MIGUEL, José Carlos. Tentativas de Renovação dos Programas de Ensino de Matemática no Estado de São Paulo Pós-64: Para Onde Se Encaminham? Disponível em: <<https://alsafi.ead.unesp.br/bitstream/handle/11449/139860/ISSN2175-7054-2009-9297-9309.pdf?sequence=1&isAllowed=y>> . Acesso em: 5 de março de 2018.

OLIVEIRA, Adão Francisco de. *Políticas Públicas Educacionais: conceito e contextualização numa perspectiva didática*. Disponível em: <<http://www.sinprodf.org.br/wp-content/uploads/2012/01/texto-4-pol%C3%8Dticas-p%C3%9Ablicas-educacionais.pdf>> Acesso em: 19 de Dezembro 2017.

PROVA do SARESP 2007 do 3º ano do Ensino Médio. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matem%C3%A1tica/EM%203%C2%AA%20s%C3%A9rie/1\\_Manh%C3%A3/Prova-MAT-3EM-Manha.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matem%C3%A1tica/EM%203%C2%AA%20s%C3%A9rie/1_Manh%C3%A3/Prova-MAT-3EM-Manha.pdf)>. Acesso em: 16 de novembro de 2018.

PROVA do SARESP 2007 do 9º ano. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matem%C3%A1tica/8%C2%AA%20s%C3%A9rie%20EF/1\\_Manh%C3%A3/Prova-MAT-8EF-Manha.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matem%C3%A1tica/8%C2%AA%20s%C3%A9rie%20EF/1_Manh%C3%A3/Prova-MAT-8EF-Manha.pdf)>. Acesso em: 16 de novembro de 2018.

PROVA do SARESP 2007 do 7º ano. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matem%C3%A1tica/6%C2%AA%20s%C3%A9rie%20EF/1\\_Manh%C3%A3/Prova-MAT-6EF-Manha.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matem%C3%A1tica/6%C2%AA%20s%C3%A9rie%20EF/1_Manh%C3%A3/Prova-MAT-6EF-Manha.pdf)>. Acesso em: 16 de novembro de 2018.

RELATÓRIO pedagógico 2008 SARESP. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2008/pdf/Relatorios/2\\_SARESP%202008%20-%20Relat%C3%B3rio%20Pedag%C3%B3gico\\_Matem%C3%A1tica.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2008/pdf/Relatorios/2_SARESP%202008%20-%20Relat%C3%B3rio%20Pedag%C3%B3gico_Matem%C3%A1tica.pdf)>. Acesso em: 19 de novembro de 2018.

RELATÓRIO pedagógico 2010 SARESP. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2010/pdf/relat/relat%C3%B3rio\\_pedag%C3%B3gico\\_matem%C3%A1tica\\_2010.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2010/pdf/relat/relat%C3%B3rio_pedag%C3%B3gico_matem%C3%A1tica_2010.pdf)>. Acesso em: 19 de novembro de 2018.

RELATÓRIO pedagógico 2012 SARESP. Disponível em: <<https://m mediasstoragesec.blob.core.windows.net/001/2017/02/SARESP-2012-relatrio-pedaggico-mat-.pdf>>. Acesso em: 19 de novembro de 2018.

RELATÓRIO pedagógico 2013 SARESP Disponível em: <[http://file.fde.sp.gov.br/SARESP/SARESP2013/Arquivos/SARESP%202013\\_Relat%C3%B3rio%20Pedag%C3%B3gico\\_Matem%C3%A1tica.pdf](http://file.fde.sp.gov.br/SARESP/SARESP2013/Arquivos/SARESP%202013_Relat%C3%B3rio%20Pedag%C3%B3gico_Matem%C3%A1tica.pdf)>. Acesso em: 19 de novembro de 2018.

RELATÓRIO pedagógico 2014 SARESP. Disponível em: <[http://file.fde.sp.gov.br/SARESP/SARESP2014/Arquivos/RELATORIO\\_PEDAGOGICO\\_MATEMATICA.pdf](http://file.fde.sp.gov.br/SARESP/SARESP2014/Arquivos/RELATORIO_PEDAGOGICO_MATEMATICA.pdf)>. Acesso em: 19 de novembro de 2018.

RELATÓRIO pedagógico 2015 SARESP. Disponível em: <[http://file.fde.sp.gov.br/SARESP/SARESP2015/Arquivos/MT\\_2015\\_online.pdf](http://file.fde.sp.gov.br/SARESP/SARESP2015/Arquivos/MT_2015_online.pdf)>. Acesso em: 19 de novembro de 2018.

RESULTADOS do SARESP 2007. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Boletim/046152\\_2.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Boletim/046152_2.pdf)> Acesso em: 20 de Dezembro 2017.

RESULTADOS do SARESP 2008. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2008/SARESP2008/Arquivos/Boletim/468EF3EM/046152\\_B.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2008/SARESP2008/Arquivos/Boletim/468EF3EM/046152_B.pdf)> Acesso em: 20 de Dezembro 2017.

RESULTADOS do SARESP 2009. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2009/pdf/1\\_Resultados\\_Gerais\\_Rede\\_Estadual.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2009/pdf/1_Resultados_Gerais_Rede_Estadual.pdf)> Acesso em: 20 de Dezembro 2017.

RESULTADOS do SARESP 2010. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2010/Boletins/RedeEstadual/1/046152\\_1.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2010/Boletins/RedeEstadual/1/046152_1.pdf)> Acesso em: 20 de Dezembro 2017.

RESULTADOS do SARESP 2011. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2011/Boletins/RedeEstadual/1/046152\\_1.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2011/Boletins/RedeEstadual/1/046152_1.pdf)> Acesso em: 20 de Dezembro 2017.

RESULTADOS do SARESP 2012. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2012/2012/Boletim/RedeEstadual/1/046152\\_1.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2012/2012/Boletim/RedeEstadual/1/046152_1.pdf)> Acesso em: 20 de Dezembro 2017.

RESULTADOS do SARESP 2013. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2013/Boletim/RedeEstadual/1/2013\\_RE\\_046152\\_1.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2013/Boletim/RedeEstadual/1/2013_RE_046152_1.pdf)> Acesso em: 20 de Dezembro 2017.

RESULTADOS do SARESP 2014. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2014/Boletim/RedeEstadual/1/2014\\_RE\\_046152\\_1.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2014/Boletim/RedeEstadual/1/2014_RE_046152_1.pdf)> Acesso em: 20 de Dezembro 2017.

RESULTADOS do SARESP 2015. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2015/Boletim/RedeEstadual/1/2015\\_RE\\_046152\\_1.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2015/Boletim/RedeEstadual/1/2015_RE_046152_1.pdf)> Acesso em: 20 de Dezembro 2017.

RESULTADOS do SARESP 2016. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2016/Boletim/RedeEstadual/1/2016\\_RE\\_046152\\_1.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2016/Boletim/RedeEstadual/1/2016_RE_046152_1.pdf)> Acesso em: 20 de Dezembro 2017.

RESULTADOS do SARESP 2017. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2017/Boletim/RedeEstadual/1/2017\\_RE\\_046152\\_1.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2017/Boletim/RedeEstadual/1/2017_RE_046152_1.pdf)>. Acesso em: 19 de novembro de 2018.

SANFELICE, José Luís. A Política Educacional do Estado de São Paulo: Apontamentos. *Nuances: estudos sobre Educação*, Presidente Prudente, v. 17, n. 18, p146-159, jan./ dez. 2010. Disponível em: <<http://revista.fct.unesp.br/index.php/Nuances/article/view-File/730/742>>. Acesso em: 30 de novembro de 2018.

SANTOS, Uillians Eduardo dos e SABIA, Claudia Pereira de Pádua. *Percurso histórico do SARESP e as implicações para o trabalho pedagógico em sala de aula*. Disponível em: <<http://publicacoes.fcc.org.br/ojs/index.php/eae/article/download/3006/3066>>. Acesso em: 20 de novembro de 2018.

SARESP - SISTEMA DE AVALIAÇÃO DE RENDIMENTO ESCO-

LAR DO ESTADO DE SÃO PAULO – 2003. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2003/resultados/SARESP\\_Relatorio.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2003/resultados/SARESP_Relatorio.pdf)>. Acesso em: 19 de novembro de 2018.

SECRETARIA da Educação do Estado de São Paulo. *Avaliação de Aprendizagem e Processo*. Disponível em: <<http://www.educacao.sp.gov.br/avaliacao-aprendizagem>> Acesso em: 20 de Dezembro 2017.

SECRETARIA da Educação do Estado de São Paulo. IDESP. Disponível em: <<http://www.educacao.sp.gov.br/IDESP>> Acesso em: 20 de Dezembro 2017.

SECRETARIA da Educação do Estado de São Paulo. SARESP. Disponível em: <<http://www.educacao.sp.gov.br/SARESP>> Acesso em: 20 de Dezembro 2017.

SECRETARIA da Educação do Estado de São Paulo. Sistemas de Avaliação. Disponível em: <<http://www.educacao.sp.gov.br/avaliacoes>> Acesso em: 20 de Dezembro 2017.

SUMARIO executivo SARESP 2016. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2016/Arquivos/Sumario\\_Executivo\\_SARESP\\_2016.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2016/Arquivos/Sumario_Executivo_SARESP_2016.pdf)>. Acesso em: 19 de novembro de 2018.

SUMARIO executivo SARESP 2017. Disponível em: <[http://SARESP.fde.sp.gov.br/2017/Arquivos/sumario\\_executivo\\_15\\_junho.pdf](http://SARESP.fde.sp.gov.br/2017/Arquivos/sumario_executivo_15_junho.pdf)>. Acesso em: 19 de novembro de 2018.

## PREVISÃO PARA O IPCA UTILIZANDO O MODELO DE MÉDIAS MÓVEIS

Caroline Vaz Barto  
Orientadora: Profa Ms. Letícia Faleiros  
Chaves Rodrigues

**Resumo:** O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo de previsão estático, denominado médias móveis, bem como aplicar este modelo ao IPCA (Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo). Este índice é usado para estabelecer a inflação, sendo assim importante para a matemática financeira e para nós, consumidores acompanhar a economia do país.

**Palavras-Chaves:** Estatística, séries temporais, médias móveis.

### Introdução

A estatística é a ciência que coleta, organiza e interpreta dados, sejam eles quantitativos ou qualitativos. E estes dados fazem parte da nossa rotina como cidadãos, tais como a venda de um determinado produto, o índice de popularidade dos pré-candidatos à presidência do país, etc. Sendo assim, nota-se a importância de compreender a estatística.

Estes dados variam ao decorrendo tempo, ou seja, são exemplos de séries temporais, e existem alguns modelos de previsão, que, aplicado nas séries temporais se tem inferências a curto ou longo prazo. Neste trabalho, foi apresentado o modelo Médias Móveis, juntamente com uma aplicação em uma série importante para o mercado financeiro, essa série traz dados do índice de preços e para testar o sucesso das previsões foi apontado algumas medidas de acuracidade, são eles *MSD*, *MAD* e *MAPE*. Tanto o modelo, quanto as medidas de acuracidades são uma ferramenta simples, de fácil compreensão, onde todos podem ter acesso e utilizá-la de maneira adequada para tomar decisões em situações que fazem parte do dia a dia, seja na área financeira,

familiar, trabalho, etc.

## 1 Séries temporais

Analisar o comportamento da tendência da série ajuda-nos a ter uma ideia de como ficariam as previsões. Partindo disso, o que são as séries temporais?

Série temporal é uma coleção de dados e observações sobre uma variável, observações essas que são feitas ao longo de um determinado tempo. Por exemplo, vendas mensais de uma empresa, valores mensais do IPC-A, preços diários de ações, etc.

Uma série temporal se decompõe em três principais elementos, que são eles: tendência, sazonalidade e aleatório.

Tendência é um movimento prolongado da série, esse movimento pode ser crescente, decrescente ou estacionada. Isolar a tendência facilita no processo da previsão e também auxilia na visualização dos demais componentes.

Sazonalidade é uma variação que tem certa frequência, um ritmo, se repetindo todo ano, como por exemplos feriados nacionais.

As variações aleatórias, como o nome já sugere, não tem qualquer frequência ou previsão, como catástrofes naturais.

### 1.1 Modelos de previsão para séries temporais

Os modelos de séries temporais utilizam valores que ocorreram no passado da série temporal para prever seus valores futuros, ou seja, esses modelos nascem para auxiliar na leitura dos dados de séries temporais, fazendo previsões baseadas nos valores anteriores de sua própria série. Neste artigo usaremos o modelo de previsão de médias móveis para prever valores do IPCA.

## 2 Médias móveis

Sabemos que as médias aritméticas consistem em somar suas parcelas e dividir pela quantidade de elementos. No cálculo de médias móveis é semelhante, porém não dividimos pelo número de elementos, dividimos por  $k$  (tamanho do período). Ou seja, o modelo de previsão de média móvel utiliza a média de  $k$  últimos valores de uma série temporal para fazer uma previsão para o período de tempo  $t$ .

Esse modelo “divide” os cálculos em períodos, o tamanho deste período fica a critério de quem está fazendo as previsões.

Sua equação se dá por:

$$\hat{y}_t = \frac{y_{t-1} + y_{t-2} + \dots + y_{t-k}}{k}$$

## 3 Aplicando as médias móveis

### 3.1 O IPCA

O IPCA – Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo – é um importante índice determinado pelo IBGE, que identifica a variação dos preços no comércio. Ele é utilizado pelo Banco Central como principal medidor da inflação do país.

E é um importante índice para verificar a economia do país. Pois, através do IPCA o CMN – Conselho Monetário Nacional – determina a meta da inflação. Com base na meta da inflação, o Copom – Comitê de Políticas Monetárias – determina a taxa Selic Meta. E é a Selic Meta que regula a taxa Selic Over, assim como todas as outras taxas do Brasil.

A seguir apresentamos a evolução do IPCA mensalmente e anualmente, fazendo projeções para os próximos meses e anos.

### 3.2 Série temporal do IPCA x Média Móvel

A tabela a seguir apresenta a evolução mensal do IPCA desde 1995, conforme dados fornecidos pelo IBGE, onde foi estudado os valores mensais, o acumulado de 3 meses, 6 meses e 12 meses, com o objetivo de efetuar previsões para os próximos meses de 2018, considerando a ordem das médias móveis 3, 6 e 12, afim de compará-las.

Para os cálculos da média móvel de 3 períodos, fizemos a média do acumulado de três meses. Por exemplo, no mês de abril de 1995, o acumulado dos três últimos meses (janeiro de 2015, fevereiro de 2015, março de 2015) foi 4,33, dividindo este valor por três, obtivemos 1,44, que seria a previsão para o mês de abril. Em seguida, desprezamos o mês de janeiro e somamos o mês de abril, cujo valor é de 5,08, dividindo por 3 novamente, adquirimos 1,69 que será a previsão para o mês de maio. Assim sucessivamente, foram feitas as previsões até o mês de dezembro de 2018, considerando a ordem 3.

Analogamente, para os cálculos da média móvel de 6 períodos, fizemos a média do acumulado de seis meses. Por exemplo, o acumulado de janeiro à junho de 1995 foi de 12,20, dividindo este valor por 6, adquirimos 2,03, que será a previsão para o mês de julho de 1995. Desprezando janeiro de 1995 e somando julho de 1995, e efetuando a média, obtivemos 2,15, que será a previsão para agosto de 1995. Assim sucessivamente até dezembro de 2018.

O mesmo foi feito com o acumulado de 12 meses. Para uma exatidão dos resultados, foram utilizados os acumulados de três, seis e doze meses fornecidos na série original do IBGE.

Os resultados das médias móveis de três, seis e doze períodos estão apresentados na seguinte tabela, bem como o erro absoluto entre o valor real e o valor previsto para cada período.

Tabela 1 – Aplicação das médias móveis na série história do IPCA.

SÉRIE HISTÓRICA DO IPCA									
ANO	MÊS	VARIACÃO (%)					MÉDIAS MÓVEIS		
		NO	3	6	NO	12	MED MÓVEL	MED MÓVEL	MED MÓVEL
		MÊS	MESES	MESES	ANO	MESES	3P	6P	12P
1995	JAN	1,70	6,35	12,86	1,70				
	FEV	1,02	4,49	11,93	2,74		2,12	2,14	
	MAR	1,55	4,33	11,95	4,33		1,50	1,99	
	ABR	2,43	5,08	11,75	6,87		1,44	1,99	
	MAI	2,67	6,80	11,59	9,72		1,69	1,96	
	JUN	2,26	7,54	12,20	12,20	33,03	2,27	1,93	
	JUL	2,36	7,47	12,92	14,84	27,45	2,51	2,03	2,75
	AGO	0,99	5,71	12,89	15,98	26,36	2,49	2,15	2,29
	SET	0,99	4,40	12,27	17,13	25,69	1,90	2,15	2,20
	OUT	1,41	3,43	11,15	18,78	24,21	1,47	2,05	2,14
	NOV	1,47	3,92	9,85	20,53	22,59	1,14	1,86	2,02
	DEZ	1,56	4,51	9,10	22,41	22,41	1,31	1,64	1,88
1996	JAN	1,34	4,43	8,01	1,34	21,97	1,50	1,52	1,87
	FEV	1,03	3,98	8,06	2,38	21,99	1,48	1,34	1,83
	MAR	0,35	2,74	7,37	2,74	20,55	1,33	1,34	1,83
	ABR	1,26	2,66	7,21	4,04	19,17	0,91	1,23	1,71
	MAI	1,22	2,85	6,95	5,31	17,49	0,89	1,20	1,60
	JUN	1,19	3,71	6,56	6,56	16,26	0,95	1,16	1,46
	JUL	1,11	3,56	6,32	7,74	14,84	1,24	1,09	1,36
	AGO	0,44	2,76	5,70	8,22	14,21	1,19	1,05	1,24
	SET	0,15	1,71	5,49	8,38	13,26	0,92	0,95	1,18
	OUT	0,30	0,89	4,49	8,70	12,02	0,57	0,92	1,11
	NOV	0,32	0,77	3,56	9,05	10,75	0,30	0,75	1,00
	DEZ	0,47	1,09	2,82	9,56	9,56	0,26	0,59	0,90
1997	JAN	1,18	1,98	2,89	1,18	9,39	0,36	0,47	0,80
	FEV	0,50	2,16	2,95	1,69	8,82	0,66	0,48	0,78
	MAR	0,51	2,21	3,32	2,21	8,99	0,72	0,49	0,74
	ABR	0,88	1,90	3,92	3,10	8,58	0,74	0,55	0,75
	MAI	0,41	1,81	4,01	3,53	7,71	0,63	0,65	0,72
	JUN	0,54	1,84	4,09	4,09	7,02	0,60	0,67	0,64
	JUL	0,22	1,17	3,10	4,31	6,08	0,61	0,68	0,59
	AGO	-0,02	0,74	2,56	4,29	5,59	0,39	0,52	0,51
	SET	0,06	0,26	2,11	4,36	5,50	0,25	0,43	0,47
	OUT	0,23	0,27	1,45	4,60	5,42	0,09	0,35	0,46
	NOV	0,17	0,46	1,20	4,77	5,27	0,09	0,24	0,45
	DEZ	0,43	0,83	1,09	5,22	5,22	0,15	0,20	0,44
1998	JAN	0,71	1,31	1,59	0,71	4,73	0,28	0,18	0,44
	FEV	0,46	1,61	2,08	1,17	4,69	0,44	0,27	0,39
	MAR	0,34	1,52	2,36	1,52	4,52	0,54	0,35	0,39
	ABR	0,24	1,04	2,37	1,76	3,85	0,51	0,39	0,38
	MAI	0,50	1,08	2,71	2,27	3,95	0,35	0,40	0,32
	JUN	0,02	0,76	2,29	2,29	3,41	0,36	0,45	0,33
	JUL	-0,12	0,40	1,45	2,17	3,06	0,25	0,38	0,28
	AGO	-0,51	-0,61	0,47	1,65	2,55	0,13	0,24	0,26
	SET	-0,22	-0,85	-0,09	1,42	2,27	-0,20	0,08	0,21
	OUT	0,02	-0,71	-0,31	1,44	2,05	-0,28	-0,02	0,19
	NOV	-0,12	-0,32	-0,93	1,32	1,76	-0,24	-0,05	0,17
	DEZ	0,33	0,23	-0,62	1,65	1,65	-0,11	-0,16	0,15

1999	JAN	0,70	0,91	0,20	0,70	1,65	0,11	-0,10	0,14
	FEV	1,05	2,09	1,77	1,76	2,24	0,30	0,03	0,14
	MAR	1,10	2,88	3,11	2,88	3,02	0,70	0,30	0,19
	ABR	0,56	2,73	3,67	3,45	3,35	0,96	0,52	0,25
	MAI	0,30	1,97	4,11	3,76	3,14	0,91	0,61	0,28
	JUN	0,19	1,05	3,96	3,96	3,32	0,66	0,69	0,26
	JUL	1,09	1,59	4,36	5,09	4,57	0,35	0,66	0,28
	AGO	0,56	1,85	3,86	5,68	5,69	0,53	0,73	0,38
	SET	0,31	1,97	3,05	6,01	6,25	0,62	0,64	0,47
	OUT	1,19	2,07	3,69	7,27	7,50	0,66	0,51	0,52
	NOV	0,95	2,47	4,36	8,29	8,65	0,69	0,62	0,63
	DEZ	0,60	2,76	4,79	8,94	8,94	0,82	0,73	0,72
2000	JAN	0,62	2,19	4,30	0,62	8,85	0,92	0,80	0,75
	FEV	0,13	1,36	3,86	0,75	7,86	0,73	0,72	0,74
	MAR	0,22	0,97	3,76	0,97	6,92	0,45	0,64	0,66
	ABR	0,42	0,77	2,97	1,40	6,77	0,32	0,63	0,58
	MAI	0,01	0,65	2,02	1,41	6,47	0,26	0,50	0,56
	JUN	0,23	0,66	1,64	1,64	6,51	0,22	0,34	0,54
	JUL	1,61	1,85	2,64	3,28	7,06	0,22	0,27	0,54
	AGO	1,31	3,18	3,85	4,63	7,86	0,62	0,44	0,59
	SET	0,23	3,18	3,86	4,87	7,77	1,06	0,64	0,66
	OUT	0,14	1,68	3,57	5,02	6,65	1,06	0,64	0,65

SÉRIE HISTÓRICA DO IPCA

ANO	MÊS	VARIACÃO (%)				MÉDIAS MÓVEIS			
		NO	3	NO	12	MED MÓVEL	MED MÓVEL	MED MÓVEL	
		MÊS	MESES	ANO	MESES	3P	6P	12P	
2001	NOV	0,32	0,69	3,89	5,35	5,99	0,56	0,60	0,55
	DEZ	0,59	1,05	4,26	5,97	5,97	0,23	0,65	0,50
	JAN	0,57	1,49	3,20	0,57	5,92	0,35	0,71	0,50
	FEV	0,46	1,63	2,33	1,03	6,27	0,50	0,53	0,49
	MAR	0,38	1,42	2,48	1,42	6,44	0,54	0,39	0,52
	ABR	0,58	1,43	2,93	2,00	6,61	0,47	0,41	0,54
	MAI	0,41	1,38	3,03	2,42	7,04	0,48	0,49	0,55
	JUN	0,52	1,52	2,96	2,96	7,35	0,46	0,51	0,59
	JUL	1,33	2,27	3,73	4,32	7,05	0,51	0,49	0,61
	AGO	0,70	2,57	3,98	5,06	6,41	0,76	0,62	0,59
	SET	0,28	2,32	3,88	5,35	6,46	0,86	0,66	0,53
	OUT	0,83	1,82	4,14	6,22	7,19	0,77	0,65	0,54
NOV	0,71	1,83	4,45	6,98	7,61	0,61	0,69	0,60	
DEZ	0,65	2,21	4,58	7,67	7,67	0,61	0,74	0,63	
2002	JAN	0,52	1,89	3,75	0,52	7,62	0,74	0,76	0,64
	FEV	0,36	1,54	3,40	0,88	7,51	0,63	0,63	0,64
	MAR	0,60	1,49	3,73	1,49	7,75	0,51	0,57	0,63
	ABR	0,80	1,77	3,70	2,30	7,98	0,50	0,62	0,65
	MAI	0,21	1,62	3,18	2,51	7,77	0,59	0,62	0,67
	JUN	0,42	1,44	2,94	2,94	7,66	0,54	0,53	0,65
	JUL	1,19	1,83	3,63	4,17	7,51	0,48	0,49	0,64
	AGO	0,65	2,28	3,93	4,85	7,46	0,61	0,61	0,63
	SET	0,72	2,58	4,05	5,60	7,93	0,76	0,66	0,62
	OUT	1,31	2,70	4,58	6,98	8,45	0,86	0,68	0,66
	NOV	3,02	5,12	7,51	10,22	10,93	0,90	0,76	0,70
	DEZ	2,10	6,56	9,31	12,53	12,53	1,71	1,25	0,91
2003	JAN	2,25	7,55	10,46	2,25	14,47	2,19	1,55	1,04
	FEV	1,57	6,04	11,47	3,86	15,85	2,52	1,74	1,21
	MAR	1,23	5,13	12,03	5,13	16,57	2,01	1,91	1,32
	ABR	0,97	3,82	11,66	6,15	16,77	1,71	2,01	1,38

Uni-FACEF - Centro Universitário Municipal de Franca

MAI	0,61	2,84	9,04	6,80	17,24	1,27	1,94	1,40
JUN	-0,15	1,43	6,64	6,64	16,57	0,95	1,51	1,44
JUL	0,20	0,66	4,50	6,85	15,43	0,48	1,11	1,38
AGO	0,34	0,39	3,24	7,22	15,07	0,22	0,75	1,29
SET	0,78	1,32	2,78	8,05	15,14	0,13	0,54	1,26
OUT	0,29	1,42	2,09	8,37	13,98	0,44	0,46	1,26
NOV	0,34	1,42	1,81	8,74	11,02	0,47	0,35	1,17
DEZ	0,52	1,15	2,49	9,30	9,30	0,47	0,30	0,92
<b>2004</b>								
JAN	0,76	1,63	3,07	0,76	7,71	0,38	0,42	0,78
FEV	0,61	1,90	3,34	1,37	6,69	0,54	0,51	0,64
MAR	0,47	1,85	3,03	1,85	5,89	0,63	0,00	0,56
ABR	0,37	1,46	3,11	2,23	5,26	0,62	0,51	0,49

SÉRIE HISTÓRICA DO IPCA

ANO	MÊS	VARIÇÃO (%)				MÉDIAS MÓVEIS				
		3		6		NO	12	MED MÓVEL	MED MÓVEL	MED MÓVEL
		MÊS	MESES	MESES	ANO	MESES	3P	6P	12P	
MAI	0,51	1,36	3,28	2,75	5,15	0,49	0,52	0,44		
JUN	0,71	1,60	3,48	3,48	6,06	0,45	0,55	0,43		
JUL	0,91	2,14	3,63	4,42	6,81	0,53	1,00	0,51		
AGO	0,69	2,33	3,71	5,14	7,18	0,71	0,61	0,57		
SET	0,33	1,94	3,57	5,49	6,70	0,78	0,62	0,60		
OUT	0,44	1,47	3,64	5,95	6,86	0,65	0,60	0,56		
NOV	0,69	1,47	3,83	6,68	7,24	0,49	0,51	0,57		
DEZ	0,86	2,00	3,98	7,60	7,60	0,49	0,64	0,60		
<b>2005</b>										
JAN	0,58	2,14	3,64	0,58	7,41	0,67	0,51	0,63		
FEV	0,59	2,04	3,54	1,17	7,39	0,71	0,61	0,62		
MAR	0,61	1,79	3,83	1,79	7,54	0,68	0,55	0,62		
ABR	0,87	2,08	4,27	2,68	8,07	0,60	0,64	0,63		
MAI	0,49	1,98	4,07	3,18	8,05	0,69	0,61	0,67		
JUN	-0,02	1,34	3,16	3,16	7,27	0,66	0,68	0,67		
JUL	0,25	0,72	2,82	3,42	6,57	0,45	0,60	0,61		
AGO	0,17	0,40	2,39	3,59	6,02	0,24	0,47	0,55		
SET	0,35	0,77	2,13	3,95	6,04	0,13	0,64	0,50		
OUT	0,75	1,27	2,00	4,73	6,36	0,26	0,36	0,50		
NOV	0,55	1,66	2,07	5,31	6,22	0,42	0,61	0,53		
DEZ	0,36	1,67	2,45	5,69	5,69	0,55	0,35	0,52		
<b>2006</b>										
JAN	0,59	1,51	2,80	0,59	5,70	0,56	0,64	0,47		
FEV	0,41	1,37	3,05	1,00	5,51	0,50	0,47	0,48		
MAR	0,43	1,44	3,13	1,44	5,32	0,46	0,68	0,46		
ABR	0,21	1,05	2,58	1,65	4,63	0,48	0,52	0,44		
MAI	0,10	0,74	2,12	1,75	4,23	0,35	0,47	0,39		
JUN	-0,21	0,10	1,54	1,54	4,03	0,25	0,35	0,35		
JUL	0,19	0,08	1,13	1,73	3,97	0,03	0,36	0,34		
AGO	0,05	0,03	0,77	1,78	3,84	0,03	0,19	0,33		
SET	0,21	0,45	0,55	2,00	3,70	0,01	0,35	0,32		
OUT	0,33	0,59	0,67	2,33	3,26	0,15	0,09	0,31		
NOV	0,31	0,85	0,88	2,65	3,02	0,20	0,47	0,27		
DEZ	0,48	1,12	1,58	3,14	3,14	0,28	0,15	0,25		

2007	JAN	0,44	1,23	1,83	0,44	2,99	0,37	0,52	0,26
	FEV	0,44	1,37	2,23	0,88	3,02	0,41	0,31	0,25
	MAR	0,37	1,26	2,39	1,26	2,96	0,46	0,35	0,25
	ABR	0,25	1,06	2,31	1,51	3,00	0,42	0,40	0,25
	MAI	0,28	0,90	2,28	1,79	3,18	0,35	0,19	0,25
	JUN	0,28	0,81	2,08	2,08	3,69	0,30	0,38	0,27
	JUL	0,24	0,80	1,87	2,32	3,74	0,27	0,09	0,31
	AGO	0,47	0,99	1,90	2,80	4,18	0,27	0,31	0,31
	SET	0,18	0,89	1,71	2,99	4,15	0,33	0,15	0,35
	OUT	0,30	0,95	1,76	3,30	4,12	0,30	0,29	0,35

SÉRIE HISTÓRICA DO IPCA

ANO	MÊS	VARIAÇÃO (%)					MÉDIAS MÓVEIS			
		NO		6		12		MED MÓVEL	MED MÓVEL	MED MÓVEL
		MÊS	MESES	MESES	ANO	MESES	3P	6P	12P	
2008	NOV	0,38	0,86	1,86	3,69	4,19	0,32	0,31	0,34	
	DEZ	0,74	1,43	2,33	4,46	4,46	0,29	0,31	0,35	
	JAN	0,54	1,67	2,64	0,54	4,56	0,48	0,40	0,37	
	FEV	0,49	1,78	2,66	1,03	4,61	0,56	0,44	0,38	
	MAR	0,48	1,52	2,97	1,52	4,73	0,59	0,38	0,38	
	ABR	0,55	1,53	3,22	2,08	5,04	0,51	0,50	0,39	
	MAI	0,79	1,83	3,64	2,88	5,58	0,51	0,31	0,42	
	JUN	0,74	2,09	3,64	3,64	6,06	0,61	0,61	0,47	
	JUL	0,53	2,07	3,63	4,19	6,37	0,70	0,29	0,51	
	AGO	0,28	1,56	3,42	4,48	6,17	0,69	0,61	0,53	
	SET	0,26	1,07	3,19	4,76	6,25	0,52	0,31	0,51	
	OUT	0,45	0,99	3,09	5,23	6,41	0,36	0,53	0,52	
2009	NOV	0,36	1,07	2,65	5,61	6,39	0,33	0,44	0,53	
	DEZ	0,28	1,09	2,18	5,90	5,90	0,36	0,44	0,53	
	JUN	0,36	1,32	2,57	2,57	4,80	0,36	0,36	0,49	
	JUL	0,24	1,07	2,32	2,81	4,50	0,44	0,43	0,40	
	AGO	0,15	0,75	1,91	2,97	4,36	0,36	0,39	0,38	
	SET	0,24	0,63	1,96	3,21	4,34	0,25	0,32	0,36	
	OUT	0,28	0,67	1,75	3,50	4,17	0,21	0,33	0,36	
	NOV	0,41	0,93	1,69	3,93	4,22	0,22	0,29	0,35	
	DEZ	0,37	1,06	1,70	4,31	4,31	0,31	0,28	0,35	
	2010	JAN	0,75	1,54	2,22	0,75	4,59	0,35	0,28	0,36
		FEV	0,78	1,91	2,86	1,54	4,83	0,51	0,37	0,38
		MAR	0,52	2,06	3,15	2,06	5,17	0,64	0,48	0,40
ABR		0,57	1,88	3,45	2,65	5,26	0,69	0,53	0,43	
MAI		0,43	1,53	3,47	3,09	5,22	0,63	0,58	0,44	
JUN		0,00	1,00	3,09	3,09	4,84	0,51	0,58	0,44	
JUL		0,01	0,44	2,33	3,10	4,60	0,33	0,52	0,40	
AGO		0,04	0,05	1,58	3,14	4,49	0,15	0,39	0,38	
SET		0,45	0,50	1,51	3,60	4,70	0,02	0,26	0,37	
OUT		0,75	1,24	1,69	4,38	5,20	0,17	0,25	0,39	
NOV		0,83	2,04	2,09	5,25	5,63	0,41	0,28	0,43	
DEZ		0,63	2,23	2,74	5,91	5,91	0,68	0,35	0,47	

2011	JAN	0,83	2,31	3,58	0,83	5,99	0,74	0,46	0,49
	FEV	0,80	2,28	4,37	1,64	6,01	0,77	0,60	0,50
	MAR	0,79	2,44	4,72	2,44	6,30	0,76	0,73	0,50
	ABR	0,77	2,38	4,74	3,23	6,51	0,81	0,79	0,53
	MAI	0,47	2,04	4,37	3,71	6,55	0,79	0,79	0,54
	JUN	0,15	1,40	3,87	3,87	6,71	0,68	0,73	0,55
	JUL	0,16	0,78	3,18	4,04	6,87	0,47	0,65	0,56
	AGO	0,37	0,68	2,74	4,42	7,23	0,26	0,53	0,57

SÉRIE HISTÓRICA DO IPCA

ANO	MÊS	VARIACÃO (%)				MÉDIAS MÓVEIS			
		NO	3	6	NO	12	MED MÓVEL	MED MÓVEL	MED MÓVEL
		MÊS	MESES	MESES	ANO	MESES	3P	6P	12P
2012	SET	0,53	1,06	2,47	4,97	7,31	0,23	0,46	0,60
	OUT	0,43	1,34	2,13	5,43	6,97	0,35	0,41	0,61
	NOV	0,52	1,49	2,18	5,97	6,64	0,45	0,36	0,58
	DEZ	0,50	1,46	2,54	6,50	6,50	0,50	0,36	0,55
	JAN	0,56	1,59	2,95	0,56	6,22	0,49	0,42	0,54
	FEV	0,45	1,52	3,03	1,01	5,85	0,53	0,49	0,52
	MAR	0,21	1,22	2,70	1,22	5,24	0,51	0,51	0,49
	ABR	0,64	1,31	2,91	1,87	5,10	0,41	0,45	0,44
	MAI	0,36	1,21	2,75	2,24	4,99	0,44	0,49	0,43
	JUN	0,08	1,08	2,32	2,32	4,92	0,40	0,46	0,42
	JUL	0,43	0,87	2,19	2,76	5,20	0,36	0,39	0,41
	AGO	0,41	0,92	2,15	3,18	5,24	0,29	0,37	0,43
2013	SET	0,57	1,42	2,51	3,77	5,28	0,31	0,36	0,44
	OUT	0,59	1,58	2,46	4,38	5,45	0,47	0,42	0,44
	NOV	0,60	1,77	2,71	5,01	5,53	0,53	0,41	0,45
	DEZ	0,79	1,99	3,44	5,84	5,84	0,59	0,45	0,46
	JAN	0,86	2,27	3,88	0,86	6,15	0,66	0,57	0,49
	FEV	0,60	2,27	4,08	1,47	6,31	0,76	0,65	0,51
	MAR	0,47	1,94	3,97	1,94	6,59	0,76	0,68	0,53
	ABR	0,55	1,63	3,93	2,50	6,49	0,65	0,66	0,55
	MAI	0,37	1,40	3,69	2,88	6,50	0,54	0,66	0,54
	JUN	0,26	1,18	3,15	3,15	6,70	0,47	0,62	0,54
	JUL	0,03	0,66	2,30	3,18	6,27	0,39	0,53	0,56
	AGO	0,24	0,53	1,93	3,43	6,09	0,22	0,38	0,52
2014	SET	0,35	0,62	1,81	3,79	5,86	0,18	0,32	0,51
	OUT	0,57	1,16	1,83	4,38	5,84	0,21	0,30	0,49
	NOV	0,54	1,47	2,01	4,95	5,77	0,39	0,31	0,49
	DEZ	0,92	2,04	2,68	5,91	5,91	0,49	0,34	0,48
	JUN	0,40	1,54	3,75	3,75	6,52	0,68	0,45	0,49
	JUL	0,01	0,87	3,19	3,76	6,50	0,51	0,63	0,54
	AGO	0,25	0,66	2,74	4,02	6,51	0,29	0,53	0,54
	SET	0,57	0,83	2,38	4,61	6,75	0,22	0,46	0,54
	OUT	0,42	1,24	2,13	5,05	6,59	0,28	0,40	0,56
	NOV	0,51	1,51	2,18	5,58	6,56	0,41	0,36	0,55
	DEZ	0,78	1,72	2,57	6,41	6,41	0,50	0,36	0,55

2015	JAN	1,24	2,55	3,83	1,24	7,14	0,57	0,43	0,53
	FEV	1,22	3,27	4,83	2,48	7,70	0,85	0,64	0,60
	MAR	1,32	3,83	5,61	3,83	8,13	1,09	0,81	0,64
	ABR	0,71	3,28	5,92	4,56	8,17	1,28	0,94	0,68
	MAI	0,74	2,79	6,16	5,34	8,47	1,09	0,99	0,68
	JUN	0,79	2,26	6,17	6,17	8,89	0,93	1,03	0,71
	JUL	0,62	2,17	5,52	6,83	9,56	0,75	1,03	0,74

SÉRIE HISTÓRICA DO IPCA

ANO	MÊS	VARIÇÃO (%)				MÉDIAS MÓVEIS			
		NO	3	6	NO	12	MED MÓVEL	MED MÓVEL	MED MÓVEL
		MÊS	MESES	MESES	ANO	MESES	3P	6P	12P
2016	AGO	0,22	1,64	4,48	7,06	9,53	0,72	0,92	0,80
	SET	0,54	1,39	3,67	7,64	9,49	0,55	0,75	0,79
	OUT	0,82	1,59	3,79	8,52	9,93	0,46	0,61	0,79
	NOV	1,01	2,39	4,07	9,62	10,48	0,53	0,63	0,83
	DEZ	0,96	2,82	4,24	10,67	10,67	0,80	0,68	0,87
	JAN	1,27	3,27	4,91	1,27	10,71	0,94	0,71	0,89
	FEV	0,90	3,16	5,63	2,18	10,36	1,09	0,82	0,89
	MAR	0,43	2,62	5,51	2,62	9,39	1,05	0,94	0,86
	ABR	0,61	1,95	5,29	3,25	9,28	0,87	0,92	0,78
	MAI	0,78	1,83	5,05	4,05	9,32	0,65	0,88	0,77
	JUN	0,35	1,75	4,42	4,42	8,84	0,61	0,84	0,78
	JUL	0,52	1,66	3,64	4,96	8,74	0,58	0,74	0,74
2017	AGO	0,44	1,32	3,17	5,42	8,97	0,55	0,61	0,73
	SET	0,08	1,04	2,81	5,51	8,48	0,44	0,53	0,75
	OUT	0,26	0,78	2,45	5,78	7,87	0,35	0,47	0,71
	NOV	0,18	0,52	1,84	5,97	6,99	0,26	0,41	0,66
	DEZ	0,30	0,74	1,79	6,29	6,29	0,17	0,31	0,58
	JAN	0,38	0,86	1,65	0,38	5,35	0,25	0,30	0,52
	FEV	0,33	1,01	1,54	0,71	4,76	0,29	0,28	0,45
	MAR	0,25	0,96	1,71	0,96	4,57	0,34	0,26	0,40
	ABR	0,14	0,72	1,59	1,10	4,08	0,32	0,29	0,38
	MAI	0,31	0,70	1,72	1,42	3,60	0,24	0,27	0,34
	JUN	-0,23	0,22	1,18	1,18	3,00	0,23	0,29	0,30
	JUL	0,24	0,32	1,04	1,43	2,71	0,07	0,20	0,25
2018	AGO	0,19	0,20	0,90	1,62	2,46	0,11	0,17	0,23
	SET	0,16	0,59	0,81	1,78	2,54	0,07	0,15	0,21
	OUT	0,42	0,77	1,09	2,21	2,70	0,20	0,14	0,21
	NOV	0,28	0,86	1,06	2,50	2,80	0,26	0,18	0,23
	DEZ	0,44	1,14	1,74	2,95	2,95	0,29	0,18	0,23
	JAN	0,29	1,01	1,79	0,29	2,86	0,38	0,29	0,25
	FEV	0,32	1,05	1,93	0,61	2,84	0,34	0,30	0,24
	MAR	0,09	0,70	1,85	0,70	2,68	0,35	0,32	0,24
	ABR	0,22	0,63	1,65	0,92	2,76	0,23	0,31	0,22
	MAI	0,40	0,71	1,77	1,33	2,86	0,21	0,28	0,23
	JUN	1,26	1,89	2,60	2,60	4,39	0,24	0,30	0,24
	JUL	0,33	2,00	2,64	2,94	4,48	0,63	0,43	0,37
AGO	-0,09	1,50	2,23	2,85	4,19	0,67	0,44	0,37	
SET						0,50	0,37	0,35	

Assim, para os próximos meses do ano de 2018, se considerarmos o período 3, 6 ou 12, tem as seguintes previsões:

Tabela 2 – Previsões para 2018.

Mês	Ano 2018		Ano 2018			Ano 2018		
	No mês	Média móvel 3p	Mês	No mês	Média móvel 6p	Mês	No mês	Média móvel 12p
JAN	0,29	<b>0,38</b>	JAN	0,29	0,29	JAN	0,29	0,25
FEV	0,32	<b>0,34</b>	FEV	0,32	0,30	FEV	0,32	0,24
MAR	0,09	<b>0,35</b>	MAR	0,09	0,32	MAR	0,09	0,24
ABR	0,22	<b>0,23</b>	ABR	0,22	0,31	ABR	0,22	0,22
MAI	0,40	<b>0,21</b>	MAI	0,40	0,28	MAI	0,40	0,23
JUN	1,26	<b>0,24</b>	JUN	1,26	0,30	JUN	1,26	0,24
JUL	0,33	<b>0,63</b>	JUL	0,33	0,43	JUL	0,33	0,37
AGO	- 0,09	<b>0,67</b>	AGO	-0,09	0,44	AGO	-0,09	0,37
SET	0,5	<b>0,50</b>	SET	0,37	<b>0,37</b>	SET	0,35	<b>0,35</b>
OUT	0,25	<b>0,25</b>	OUT	0,42	<b>0,42</b>	OUT	0,36	<b>0,36</b>
NOV	0,22	<b>0,22</b>	NOV	0,45	<b>0,45</b>	NOV	0,35	<b>0,35</b>
DEZ	0,32	<b>0,32</b>	DEZ	0,46	<b>0,46</b>	DEZ	0,36	<b>0,36</b>

#### 4 Medidas de erro

Vimos que os modelos de séries temporais é um estudo que, a partir de valores passados, é possível prever valores futuros. Logo, podem ocorrer erros nos valores medidos. Para determinar se as previsões foram boas, calculamos medidas de erro.

Existem na literatura diversas medidas de erro disponíveis dentre as quais podemos citar média percentual absoluta do erro (MAPE – Mean Absolute Percentage Error).

$$MAPE = \frac{\sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - x_t}{y_t} \right|}{n} \times 100, \text{ se } y_t \neq 0$$

Desvio padrão absoluto da média (MAD- Mean Absolute Devition).

$$MAD = \frac{\sum_{t=1}^n |y_t - x_t|}{n}$$

Desvio padrão quadrático da média (MSD – Mean Squared Devition).

$$MSD = \frac{\sum_{t=1}^n |y_t - x_t|^2}{n}$$

Estas medidas específicas que serão utilizados para medir o sucesso da previsão sob o IPCA. Conforme a tabela abaixo:

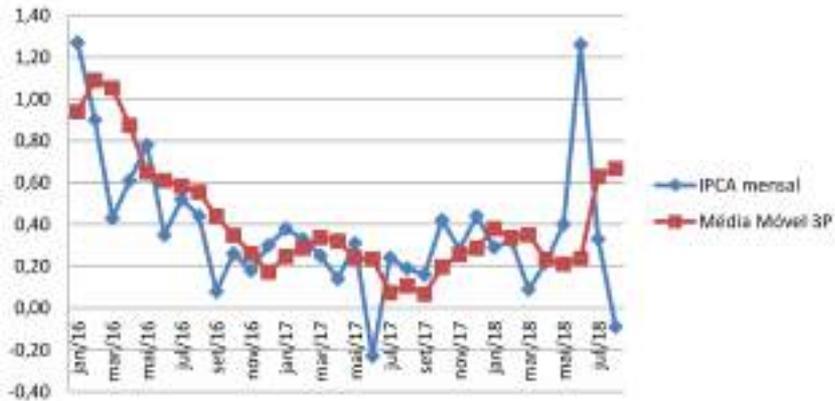
Tabela 3 – Medidas de erro.

<i>Medidas de erros</i>	<i>Médias móveis</i>		
	3P	6P	12P
<i>MAD</i>	0,27	0,29	0,29
<i>MSD</i>	0,15	0,17	0,18
<i>MAPE</i>	138%	169%	171%

Os menores valores para as medidas de acuracidade ocorreram ao utilizar as médias móveis de período três. A seguir, apresentamos o gráfico comparando os valores mensais com a média de 3 períodos, para os últimos anos.

Gráfico 1 – Comparando a série com a média móvel de 3 períodos.

### IPCA mensal x Média Móvel 3 períodos



## 5 Conclusão

Neste trabalho, foi apresentado o modelo Médias Móveis, juntamente com uma aplicação em uma série importante para o mercado financeiro, essa série traz dados do índice de preços, usando o modelo de média móvel obtivemos resultados que serão importantes na tomada de decisão, utilizando conceitos simples de matemática.

As previsões foram avaliadas com três medidas de erro muito utilizadas para previsões de séries temporais que foram MADE, MSD e MAPE. Através destas medidas, verificamos que a eficiência nas previsões está diretamente relacionada aos tamanho do período utilizado.

Logo, analisando os valores mensais e as projeções feitas, podemos perceber que as médias móveis de três períodos acompanharam melhor os dados originais, mas sofreu algumas disparidades como ocorreu no mês de junho de 2017; onde foi previsto um valor de 0,23 e ocorreu -0,22; este valor foi justificado pelo “comportamento excepcional” dos preços dos alimentos, decorrente da oferta recorde de produtos agrícolas. Outro fato importante que aconteceu recentemente foi a greve dos

caminhoneiros, que acelerou o IPCA em junho para 1,26 e estava previsto 0,24, voltando a desacelerar em julho.

### **Referências**

MOORE, David S. et. al. A prática empresarial como usar dados para tomar decisões. Tradução de Luís Antônio Farjado. 1.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. 951p.

KAZMIER, Leonad. Estatística aplicada a administração e economia. Tradução de Adriano Silva Vale Cardoso. 4. ed. Bookman, 2007. 392p.

DOWNING, Douglas; CLARK, Jeffrey. Estatística aplicada. Tradução de Alfredo Alves de Farias. 3. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

FERREIRA, Pedro Guilherme Costa. et. al. Análise de séries temporais em R: curso introdutório. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018. 264p.

RENDER, Barry; STAIR, Ralph M.; HANNA, Michael E. Análise quantitativa para administração: com Excel e POM-QM para Windows. Tradução de Lori Viali. 10. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DOANE, David; SEWARD, Lori. Estatística aplicada à administração e economia. Tradução de Mauro Raposo de Mello. 4. ed. Amgh, 2014. 812p.

SÉRIE HISTÓRICA IPCA. Ibge, 2018. Disponível em: <[https://ww2.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc\\_ipca/default-seriesHist.shtm](https://ww2.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc_ipca/default-seriesHist.shtm)>. Acesso em: 20 de agosto de 2018.

## PROCURANDO OS VALORES ÓTIMOS DO MOMENTO $q$ PARA O CÁLCULO DO GRAU DE MULTIFRACTALIDADE NO MÉTODO MFDFA

Darlly Damares Gervásio Jacinto  
Letícia Nogueira Cesion

Orientador: Prof. Dr. Antônio Carlos da Silva Filho

**Resumo:** O objetivo deste trabalho é o de verificar quais os menores valores dos momentos “ $q$ ” que devem ser usados para se calcular o grau de multifractalidade em séries temporais multifractais usando o método Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA). Os resultados mostraram que valores pequenos de “ $q$ ” (como  $q = 5$ ) já são suficientes.

**Palavras Chaves:** Multifractais. MFDFA. Grau de multifractalidade. Séries Temporais.

### 1 Introdução

Muitos estudos em finanças têm sido desenvolvidos ao longo dos anos a fim de compreender o comportamento e variações dos ativos financeiros; muitos estilizaram as evidências para os retornos da série temporal encontrados, como na volatilidade cambial, caudas “gordas”, estacionariedade e não linearidade [MANDELBROT, 1998].

Com a evolução dos estudos, particularmente em comportamento de preços de uma série temporal financeira, uma novidade surgiu: a Geometria Fractal. Os primeiros passos no tema foram tomados pelo matemático polonês Benoît Mandelbrot. O termo “Fractal” é derivado do adjetivo latim *fractus*, do verbo *frangere*, o qual significa quebrar. Ao se tratar de geometria fractal, é afirmado que objetos e fenômenos complexos podem ser reduzidos ou a unidades menores que, em si, reproduzem o objeto como um todo [MANDELBROT, 1998].

A ideia de escalar os objetos em unidades menores foi

inicialmente aplicada na geometria, como um aprimoramento da geometria Euclidiana. Este modelo objetivava mostrar que algumas coisas como um todo podem ser vistas escalas menores.

O comportamento destes objetos fractais tem sido observado em diversas áreas, como na física experimental, química, matemática, geofísica, fisiologia e até mesmo nas ciências sociais. Não obstante, sabe-se que grande parte dos bancos de dados gerados nas ciências da natureza e sociais aplicadas, como nos mercados financeiros, são sistemas complexos, que não estão em equilíbrio, o que implica que não é possível modelar e explicar seu comportamento por meio de uma única escala exponencial.

Isso acontece, por exemplo, nos dados originados de um sistema complexo: frequentemente encontramos dados fora do equilíbrio, seguindo relações de escala diferentes em várias ordens de grandeza e em diferentes regiões. Essas relações permitem uma caracterização de dados por meio de um conjunto de expoentes de escala, caracterizando os assim chamados multifractais. Estes, assim, podem servir como ferramentas de comparação com outros sistemas e modelos, a fim de se reconhecer padrões no estudo dos sistemas.

Frequentemente o comportamento destes expoentes de escala pode ser observado em vários subconjuntos fractais entrelaçados na série temporal. Ademais, pode ser necessário uma grande quantidade de escalas exponenciais para uma descrição completa do comportamento destas séries. Isto é que é chamado de comportamento multifractal. O comportamento da escala multifractal foi primeiramente observado por Mandelbrot no livro "Les Objets Fractal: forme, hasard et dimension" e confirmado por Mantegna e Stanley [MANTEGNA & STANLEY, 1996]; após isso, vários autores têm testado este comportamento em uma grande quantidade de áreas do conhecimento e têm encontrado a existência deste comportamento multifractal em múltiplas séries temporais, como no mercado financeiro a nas séries encontradas

nas ciências da natureza.

Considerando o mercado de ações, vários autores, como [CAJUEIRO et al, 2009; GRECH, 2003; KWAPIEN et al, 2005; MAGANINI et al, 2018; DA SILVA FILHO et al, 2018], concluíram que ações, índices de bolsa e taxas de câmbio de diversos mercados (americano, indiano, polonês, entre outros) têm características multifractais. As características específicas e atrativas deste mercado, associadas ao grande número de pesquisadores que pesquisam sua evolução, fazem do reconhecimento de seus padrões uma necessidade prática, envolvendo lucros e perdas.

É interessante entender se uma série financeira possui ou não função de multifractalidade, pois este conhecimento pode auxiliar seus usuários a modelar sua volatilidade e sua evolução e isto permite o desenvolvimento de modelos aplicáveis para administrar riscos, estabelecer preços e alocar portfólios.

Pensando na importância deste tópico, o objetivo desta pesquisa foi analisar quais os valores ótimos de um parâmetro chamado “momento” ( $q$ ) devem ser considerados num dos métodos mais utilizados na análise multifractal, o MF DFA (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis).

## **2 Métodos de Pesquisa**

Os estudos sobre multifractais foram iniciados por Mandelbrot em 1975 [MANDELBROT, 1998]. Neste livro, o autor entende que diversas séries encontradas na natureza não podem ser explicadas por uma única escala exponencial, afirmando que há evidência de multifractalidade em muitos casos.

Vários modelos se desenvolveram neste últimos anos objetivando analisar as propriedades multifractais de séries temporais. Os mais utilizados são: o método Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF DFA), o qual é a generalização do método

DFA, desenvolvido por Kantelhardt et al. [KANTElhARDT et al., 2002] e o método conhecido como Wavelet Transform Modulus Maxima Method (WTMM), que é uma extensão do modelo descrito por Holschneider [HOLSCHNEIDER, 1998].

O MFDFA, que utilizaremos neste trabalho é, atualmente, o método mais utilizado na área de Econofísica. A seguir encontra-se a descrição do método MFDFA descrito por Kantelhardt [KANTElhARDT et al., 2002].

O procedimento consiste de seis etapas. Suponhamos que  $x_k$  é uma série temporal de comprimento  $N$  e que esta série tem suporte compacto, ou seja,  $x_k=0$  apenas para uma fração insignificante de valores.

**Passo 1:** Determina-se o “perfil”  $Y$ :

$$Y(i) \equiv \sum_{k=1}^i [x_k - \langle x \rangle], i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

**Passo 2:** Divide-se o perfil  $Y(i)$  em  $N_s \equiv \text{Int}(N/s)$  segmentos de comprimento  $s$  não superpostos. Como o comprimento  $N$  das series normalmente não é um múltiplo da escala  $s$  considerada, sobrar , quase sempre, uma pequena porão ao final. A fim de não desconsiderar esta pequena porão da série, repete-se o mesmo procedimento, mas começando do final para o início da série (na ordem inversa, portanto). Assim, são obtidos  $2N_s$  segmentos no total.

**Passo 3:** Calcula-se a tendência local para cada um dos  $2N_s$  segmentos por uma regressão, usando o método dos mínimos quadrados. Após isso, determina-se a variância:

$$F^2(s, v) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(v-1)s + i] - y_v(i)\}^2 \quad (2)$$

para cada segmento  $v, v=1, \dots, N_s$  e

$$F^2(s, v) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[N - (v - N_s)s + i] - y_v(i)\}^2 \quad (3)$$

para  $v=N_s+1, \dots, 2N_s$ . Aqui,  $y_v(i)$  é o polinômio ajustado para o segmento  $v$ .

**Passo 4:** Faz-se a média sobre todos os segmentos a fim de obter a função de flutuação de  $q$ -ésima ordem:

$$F_q(s) \equiv \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(s, v)]^{q/2} \right\}^{1/q} \quad (4)$$

Aqui, a variável “ $q$ ” pode ter qualquer valor, exceto zero. Os passos 2 a 4 ser repetidos para diferentes escalas de tempo  $s$ .

**Passo 5:** Determina-se o comportamento de escala da função de flutuação através da análise de gráficos log-log de  $F_q(s)$  contra  $s$ , para cada valor de  $q$  (já que fenômenos com invariância de escala obedecem a uma lei de potência [MANDELROT, 1998]).

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad (5)$$

A função  $h(q)$  é conhecida como Expoente de Hurst Generalizado.

**Passo 6:** Eq. (5) pode ser escrita como  $F_q(s) = As^{h(q)}$ , a partir da qual, tirando-se logaritmos dos dois lados, chega-se em:

$$\log F_q(s) = \log A + h(q) \log s \quad (6)$$

Podendo-se obter, assim, o valor do Expoente de Hurst Generalizado.

O Expoente de Hurst Generalizado,  $h(q)$ , é independente de  $q$ , para series temporais monofractais caracterizadas por um único expoente sobre todas as escalas temporais. Esta é a diferença fundamental:  $h(q)$  varia com  $q$  para as series multifractais. Os diferentes fatores de escala para pequenas e grandes flutuações produzirão dependência significativa de  $h(q)$  em função de  $q$ . As diferenças são realçadas considerando  $q$ 's positivos e negativos: para valores de  $q$  positivos,  $h(q)$  descreve o comportamento de escala dos segmentos com grandes flutuações; já para valores de  $q$  negativos, os expoentes de escala  $h(q)$  descrevem o comportamento de escala para segmentos com pequenas flutuações.

Mas a maneira mais aceita de confirmar a multifractalidade nas séries temporais é através da análise do seu espectro. Esta análise é baseada na seguinte relação entre o Expoente de Hurst Generalizado,  $h(q)$ , e o Expoente de Renyi,  $\tau(q)$  [GREEN et al., 2014]:

$$\tau(q) = qh(q) - 1 - q(h(1) - 1) \quad (7)$$

Deduz-se, então, fazendo-se uma transformação de Legendre:

$$\alpha = \frac{d}{dq} \tau(q) \quad \text{e} \quad f(\alpha) = \alpha(q) q - \tau(q) \quad (8)$$

Usando a Equação 6, define-se o grau de multifractalidade como:

$$\Delta h = \max[h(q)] - \min[h(q)] \quad (9)$$

Já usando a Equação 8, chega-se a uma medida alternativa (mas equivalente) do grau de multifractalidade como:

$$\Delta\alpha = \max[\alpha] - \min[\alpha] \quad (10)$$

Na próxima seção faremos uma análise da dependência destas definições do grau de multifractalidade com  $q$ .

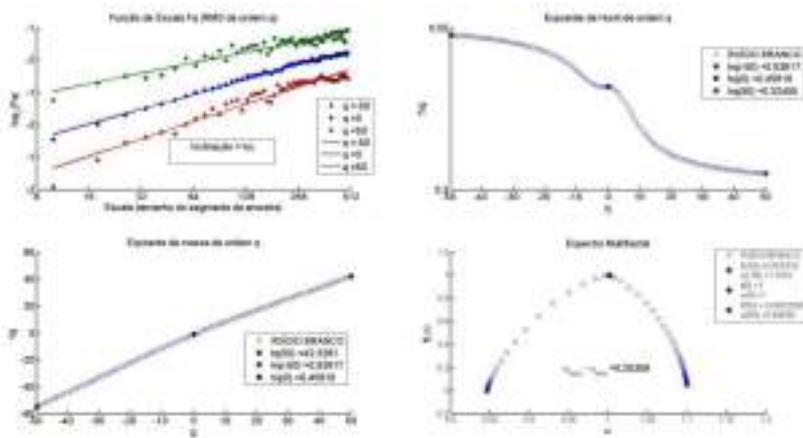
### 3 Dados e Resultados

Foram utilizadas 3 séries temporais:

- Uma série de ruído branco (whitenoise);
- Uma série monofractal;
- Uma série multifractal;

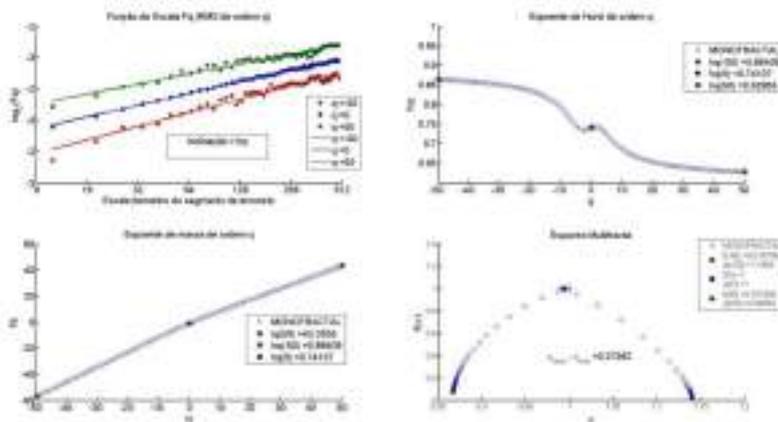
Elas foram obtidas a partir de um artigo sobre o método MFDFA [IHLEN, 2012]. Os resultados preliminares estão exibidos nas figuras 1, 2 e 3 a seguir:

Figura 1 – Apresenta 4 gráficos para a série do Ruído Branco: (1) superior esquerdo, com os logaritmo de  $F(q)$  e da escala, com as inclinações das retas fornecendo os  $h(q)$ ; (2) superior direito, com os valores de  $h(q)$  em função de  $q$ ; (3) inferior esquerdo, com os valores de  $t_q$  em função de  $q$ ; (4) inferior direito, com os valores de  $f(\alpha)$  em função de  $\alpha$ , mostrando, também o  $\Delta\alpha$ .



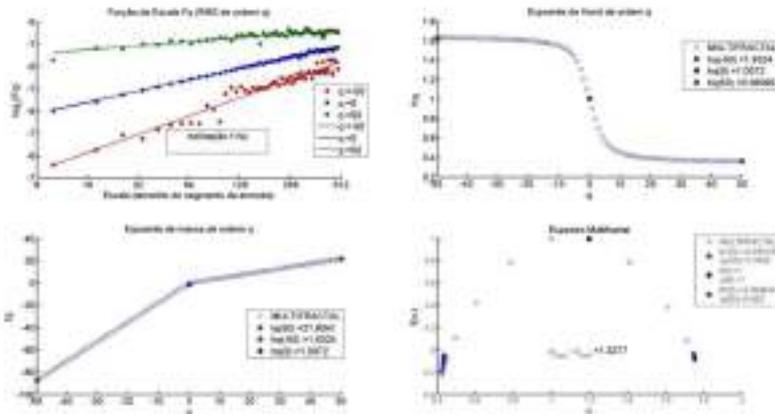
Fonte: Autores

Figura 2 – Apresenta 4 gráficos para a série Monofractal: (1) superior esquerdo, com os logaritmo de  $F(q)$  e da escala, com as inclinações das retas fornecendo os  $h(q)$ ; (2) superior direito, com os valores de  $h(q)$  em função de  $q$ ; (3) inferior esquerdo, com os valores de  $t_q$  em função de  $q$ ; (4) inferior direito, com os valores de  $f(\alpha)$  em função de  $\alpha$ , mostrando, também o  $\Delta\alpha$ .



Fonte: Autores

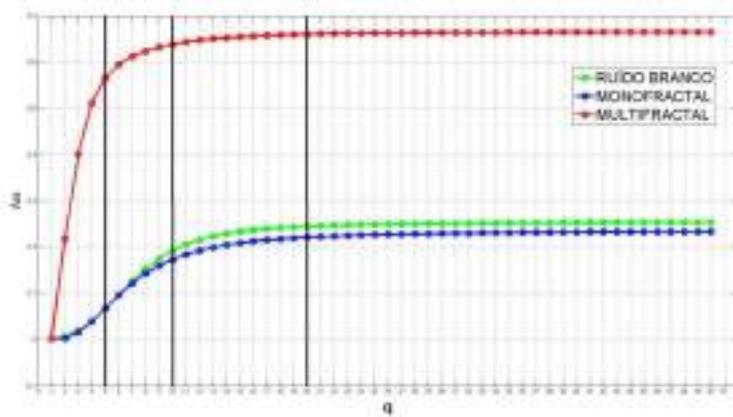
Figura 3 – Apresenta 4 gráficos para a série Multifractal: (1) superior esquerdo, com os logaritmo de  $F(q)$  e da escala, com as inclinações das retas fornecendo os  $h(q)$ ; (2) superior direito, com os valores de  $h(q)$  em função de  $q$ ; (3) inferior esquerdo, com os valores de  $t_q$  em função de  $q$ ; (4) inferior direito, com os valores de  $f(\alpha)$  em função de  $\alpha$ , mostrando, também o  $\Delta\alpha$ .



Fonte: Autores

A partir destas informações, construímos uma nova figura, que exhibe o comportamento do  $\Delta\alpha$  para  $q$  variando de -50 a 50:

Figura 4 – Apresenta os  $\Delta\alpha$  em função de  $q$  para as três séries: Ruído Branco (linha verde), Monofractal (linha azul) e Multifractal (linha vermelha).



Fonte: Autores

Na Figura 4 estão colocadas três retas verticais nos valores de  $q$  iguais a 5, 10 e 20, apenas para evidenciar que não é necessário usar grandes valores de  $q$  para se discriminar entre uma série multifractal e series de ruído branco ou monofractais.

## 4 Conclusões

Este trabalho procurou examinar quais os valores de  $q$  suficientes para se discriminar séries temporais multifractais de séries temporais monofractais ou de ruído branco. As simulações mostraram que pequenos valores de  $q$  (como  $q = 5$ ) são suficientes para se fazer tais distinções.

## Referências

CAJUEIRO, Daniel Oliveira; GOGAS, Periklis; TABAK, Benjamin Miranda. Does financial market liberalization increase the degree of market efficiency? The case of athens stock Exchange. *International Review of Financial Analysis*, v. 18, p. 50-57, 2009.

DA SILVA FILHO; MAGANINI, N. D.; ALMEIDA, E. F. Multifractal Analysis of Bitcoin Market. *Physica A*, v. 512, p. 954-967, 2018.

GRECH, Dariusz. *Chaos, Solutions and Fractals: alternative mea-*

sure of multifractal content and its application in finance. Elsevier, v. 88, p. 183-195, 2003.

GREEN, E.; HANAN, W.; HEFFERNAN, D. The origins of multifractality in financial time series and the effect of extreme events. The European Physical Journal B, v. 87, n. 6, 2014.

HOLSCHNEIDER M. On the wavelet transformation of fractals objects. Journal of Statistical Physics, v. 50, p. 963-993, mar. 1988.

IHLEN , E. A. F. Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in MatLab. Frontiers in Physiology, v. 3, p. 1-18, jun. 2012.

KANTELHARD J. W et al. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. Physica A, v. 316, p. 1-18, 2002.

KWAPIEN, Jaroslaw; OSWIECIMKA, Pawel; DROZDZ, Stanislaw. Components of multifractality in high-frequency stock returns. Physica A, v. 350, p. 466-474, 2005.

MAGANINI, N. D., DA SILVA FILHO, A.C., LIMA, F. G. Investigation of multifractality in the Brazilian stock market. Physica A, v. 497, p. 458-471, 2018.

MANDELBROT, Benoît. Objetos Fractais. Lisboa, Gradiva, 1998. 190 p.

MANTEGNA, Rosario Nunzio; STANLEY, Harry Eugene. Turbulence and financial markets. Nature, v. 383, p. 587-588, out. 1996.

