

Revista Matemática e Educação

UNI-FACEF CENTRO UNIVERSITÁRIO MUNICIPAL DE FRANCA

Prof. Dr. Alfredo José Machado Neto
Reitor

Prof. Dr. João Baptista Comparini
Vice-Reitor

Prof. Dr. José Alfredo de Pádua Guerra
Pró-Reitor de Administração

Profa. Dra. Sheila Fernandes Pimenta e Oliveira
Pró-reitora Acadêmica

Profª Drª Melissa Franchini Cavalcanti Bandos
Pró-Reitora de Extensão

Prof. Ms. Cyro de Almeida Durigan
Chefe de Departamento do curso de Administração

Prof. Ms. Orivaldo Donzelli
Chefe de Departamento do curso de Ciências Contábeis

Profª. Mª. Fúlvia Nassif Jorge Facury
*Chefe de Departamento do curso de Comunicação Social-
Publicidade e Propaganda*

Profª Drª Maria de Fátima Aveiro Colares
Chefe de Departamento do curso de Psicologia

Profa. Dra. Ana Lúcia Furquim Campos-Toscano
Chefe de Departamento do curso de Letras

Profa. Dra. Silvia Regina Viel
Chefe de Departamento do curso de Matemática

Prof. Dr. Daniel Facciolo Pires
Chefe de Departamento de Computação

Prof. Dr. Flávio Henrique Costa
Chefe do Departamento do curso de Engenharia da Produção

Prof. Ms. Anderson Fabrício Mendes
Chefe do Departamento do curso de Engenharia Civil

Prof. Dr. Frederico Alonso Sabino de Freitas
Chefe do Departamento do curso de Medicina

Prof. Dr. Marinês Santana Justo Smith
Coordenador de Pós-Graduação Stricto-Sensu

Prof. Dr. Silvio Carvalho Neto
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

UNI-FACEF CENTRO UNIVERSITÁRIO MUNICIPAL DE FRANCA

Revista Matemática e Educação

ISSN 2175-4667

Revista Matemática e Educação	Franca	v.1	n.11	p.9-178	2021
--	---------------	------------	-------------	----------------	-------------

Revista Matemática e Educação
Departamento de Matemática – Uni-FACEF
Av. Ismael Alonso y Alonso 2400 – Bairro São José
14401-135 – Franca – SP
<http://www.facef.com.br>

Comissão Editorial e Editores Responsáveis

Antônio Carlos da Silva Filho
Adriana Aparecida Silvestre Gera Ribeiro
Letícia Faleiros Chaves Rodrigues
Lucinda M. de Fátima Rodrigues Coelho
Silvia Regina Viel

**O conteúdo apresentado nesta revista é de
responsabilidade exclusiva de seus autores.**

Capa
Giovana Alves Campanaro

Revista Matemática e Educação / Uni-FACEF Centro
Universitário Municipal de Franca. v.1 , n.11 (2021). – Franca (SP):
Uni-FACEF, 2021.

Publicação Anual

ISSN 2175-4667

1. Matemática 2. Educação – Matemática 3. Periódicos
I – Uni-FACEF Centro Universitário Municipal de
Franca

CDD 510

Uni-FACEF – Centro Universitário Municipal de Franca
ABEC - Associação Brasileira de Editores Científicos

PREFÁCIO

Prefaciando uma nova Revista Matemática & Educação sempre me faz refletir sobre todo o contexto de sua elaboração. Esta edição é construída em um ano bem atípico, infelizmente, marcado por uma pandemia de Covid-19, que assola o planeta. Mas também, em um ano onde comemoramos o centenário de Paulo Freire, referência para a educação no Brasil. Ano que se faz necessário mobilizar todas as energias e retomar os trabalhos na educação, motivando os estudantes a prosseguirem na aprendizagem e sobretudo acreditando na importância dos estudos e das pesquisas na construção de um país melhor.

Mais uma vez, trazemos em nossos trabalhos pesquisas voltadas para os mais diversos temas, todos eles, claro, relacionados de alguma forma à Matemática, seja por pensar no seu ensino, em estudos de conceitos e/ou teorias, seja por aplicá-la, transformando-a em ferramenta para novos conhecimentos.

Nesse sentido exibimos nesta edição reflexões sobre várias metodologias como a embasa no uso de jogos para o ensino de matemática, e a ativa, que se centra na aprendizagem e no aluno.

Um trabalho importante desta revista também vai se debruçar sobre o Centro de Mídias - CMSP, plataforma utilizada pela Secretaria Estadual da Educação do Estado de São Paulo e trazer reflexões iniciais sobre seu papel na pandemia.

Ainda é foco de um interessante trabalho aqui publicado a discussão sobre o desenvolvimento do raciocínio lógico com jovens e adultos, além de um artigo riquíssimo sobre Criptografia, um tema de extrema importância para pensar a atualidade tecnológica em que vivemos.

Finalmente, ainda compõe esse número, um estudo sobre capitalização simples e composta, e a pesquisa de dois dos diferentes tipos de investimentos, tudo isso articulado em um ótimo trabalho sobre Matemática Financeira.

Agradecemos de forma especial o empenho do corpo docente e administrativo da instituição que viabilizaram esta publicação.

Boa Leitura!

Cordialmente

Silvia Regina Viel
Chefe do Departamento de Matemática
Centro Universitário Municipal de Franca – Uni-FACEF

SUMÁRIO

A METODOLOGIA DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: possibilidades de aplicação	09
DESENVOLVIMENTO DA METODOLOGIA ATIVA NO ENSINO DE MATEMÁTICA	36
MATEMÁTICAATIVAMENTE: um estímulo ao raciocínio lógico	62
MATEMÁTICA FINANCEIRA APLICADA: à caderneta de poupança e ao título público NTN-B principal	99
O USO DO CMSP NA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO NO CONTEXTO DA PANDEMIA COVID-19	132
TEORIA DOS NÚMEROS E CRIPTOGRAFIA	149

A METODOLOGIA DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: possibilidades de aplicação

Gabriela Moura Ferreira
Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF
gabi.gabrielamouraferreira@gmail.com

Rafaella Sousa Machado
Pedagoga e Discente do Curso de Licenciatura em Matemática
Uni-FACEF
rafaellasm18@gmail.com

Sílvia Regina Viel
Doutora em Educação Matemática e Docente do Uni-FACEF
silviarviel@gmail.com

1 Introdução

A educação se encontra em significativa transformação, consequência das mudanças constantes pelas quais a sociedade passa. Diversos fatores externos à escola relacionados ao convívio social, como por exemplo a política, religião, mídia, economia e mercado de trabalho, influenciam diretamente as expectativas da população em relação ao ensino. Sendo o professor a linha de frente de toda a organização educacional, o seu trabalho é diretamente impactado por essas expectativas, fazendo com que busque adequações e aprimoramentos para o exercício desta nobre profissão, de modo que acompanhe as necessidades da comunidade em que está inserido.

A mudança mais visada na prática docente para atender às perspectivas da atualidade é que o professor deixe de utilizar somente a metodologia tradicional e busque o uso de outras formas de lecionar. Assim, os alunos deixam de ser apenas receptores e dependentes da orientação do professor e passam a ser motivados a procurar a informação, e, assim, perceberem que o professor não é o detentor do conhecimento e sim orientador da aprendizagem.

Surge então, a necessidade de metodologias distintas da

tradicional, para que o docente possa acompanhar as evoluções e adequar-se aos novos padrões sociais, sem deixar de exercer o seu importante papel na formação dos cidadãos, de conduzir o conhecimento e de priorizar o aprendizado dos estudantes. Ainda, no caso específico da Matemática, outro desafio é superar o bloqueio que a maior parte dos alunos têm no aprendizado da disciplina, por considerarem muito difícil e até mesmo impossível aprender os conteúdos matemáticos.

O artigo apresenta a possibilidade do uso de jogos como metodologia de ensino de Matemática, tendo em vista que, para os docentes mudarem a maneira como ministram as aulas, é preciso uma busca contínua de aperfeiçoamento dos métodos e um estudo constante, além da necessidade de levar para a sala de aula outras formas de trabalhar os conteúdos e de desenvolver o aprendizado.

Outro fator importante na escolha do tema foi que as atuais perspectivas da relação do professor com o estudante, que já não é a de transmissão de conteúdo, mas sim de mediador do conhecimento, pode ser muito bem explorada pela metodologia de jogos. Ainda, a aprendizagem através de práticas interativas e participativas pode ser um grande diferencial para diluir os conceitos prévios trazidos pelos alunos em relação à disciplina.

Assim, o principal objetivo do artigo é exemplificar como a metodologia de jogos no ensino de Matemática pode ser aplicada, considerando aspectos importantes como a participação ativa do estudante, o aprendizado desenvolvido com o uso dos jogos, a evolução histórica da abordagem e alguns pontos relevantes para a escolha do jogo a ser utilizado. Para tanto, foram elaborados planos de aula com base no que diz o teórico do Construtivismo Vygotsky (2000), além de pesquisadores da área, como Kamii (1991), Kishimoto (2010), Lara (2005) e Muniz (2014).

Inicialmente, apresentam-se os jogos como metodologia de ensino, já considerando que a sua aplicação deve estar contextualizada ao conteúdo, pois o jogo como um passatempo

em um momento livre da aula, sem relação com os conceitos que a classe está estudando, não é metodologia. Outra consideração importante a se fazer é que a percepção dos jogos pelas crianças e adolescentes, muda de acordo com a faixa etária, e cabe ao docente fazer boa escolha e bom uso da ferramenta.

Na continuidade, faz-se uma breve introdução da evolução da metodologia ao longo dos anos, desde os primeiros filósofos que já percebiam a importância dos jogos no aprendizado até os dias atuais, onde temos cerca de quarenta anos de estudos mais avançados do tema. Após, trata-se da importância de saber a diferença entre atividade pedagógica, brincadeira, brinquedo, jogo e atividades lúdicas.

Em seguida, destaca-se como o aprendizado acontece quando a metodologia de jogos é colocada em prática. Apresentam-se os benefícios que ela proporciona aos estudantes, visto que está intimamente relacionado com aspectos sócio-cognitivos, como a interação, o trabalho em equipe, a cooperação, o espírito saudável de competição e o estímulo ao aprendizado, ou seja, tal metodologia vai além de facilitar a compreensão dos conteúdos.

Na sequência, o foco é como usar a metodologia no ensino da disciplina de Matemática, analisando alguns pontos como o fato dos estudantes considerarem difícil compreender os conteúdos matemáticos, além dos mesmos não enxergarem a possibilidade de o aprendizado acontecer de modo mais fluido e através de outras formas que não seja apenas o método tradicional de cópia da teoria e resolução de muitos exercícios. Por fim, foi feita uma reflexão sobre como a aplicação dos jogos pode ser um facilitador do ensino.

Espera-se que todo o conteúdo apresentado a seguir seja esclarecedor e motivador aos professores e futuros professores, para que os mesmos continuem buscando fazer a diferença e contribuir na formação escolar dos estudantes, colaborando sempre para que a educação avance positivamente.

2 Os jogos como Metodologia de Ensino

Devido à rapidez e a dinâmica com que a sociedade se transforma a ideia de trabalhar os jogos com as crianças parece algo inovador e transformador. No entanto, desde a Grécia antiga, já era evidente a importância dos jogos lúdicos no processo de formação da criança, como mostra Volpato (2017), por meio dos pensadores Aristóteles (385-322 A.C) e Platão (427-347 A.C).

Conforme o autor aborda, no conceito de Aristóteles o lúdico preparava a criança para a vida adulta, o jogo funcionava como forma de “descanso do espírito” ou recreação. Já para Platão, o jogo era visto como algo muito importante e valioso, aprender brincando, no seu conceito, refletia na personalidade da criança. Portanto, a aprendizagem deveria ser supervisionada por um adulto, como garantia de conservação das leis e virtudes.

Segundo Arce (2002), no século XVIII, Froebel (1782-1852), pioneiro na educação infantil, já intitulava o jogo como parte importantíssima da aprendizagem, pois ele acreditava que, ao ser mediada por um jogo, a criança realizaria sua assimilação de mundo, por meio da interiorização, como também no seu autoconhecimento por meio da exteriorização.

Conforme Azevedo (1979), no século XIX, Montessori (1870-1952), acreditava que o ambiente era de extrema importância para a aprendizagem da criança e que antes dela aprender o abstrato precisava primeiro do concreto. Defendia que a aprendizagem passa pelas mãos, pois é através delas que as crianças decodificam o mundo e por isso investia nos jogos sensoriais. Diversos pesquisadores contemporâneos e extemporâneos defendem a mesma linha:

Nada deve ser dado a criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração (AZEVEDO, 1979, p. 27).

Assim, entende-se que a educação lúdica, com brincadeiras e jogos, esteve presente em várias épocas, com diversos povos e em diferentes contextos. Porém a importância dos jogos como uma metodologia de ensino realmente ganhou força com os teóricos do Construtivismo, principalmente por conta da teoria de Vygotsky (2000) que acreditava que a criança precisa vivenciar novas situações e participar efetivamente da construção do seu próprio conhecimento.

No brincar, a criança está sempre acima de sua idade média, acima de seu comportamento diário. Assim na brincadeira de faz-de-conta as crianças manifestam certas habilidades que não seriam esperadas para sua idade. Nesse sentido, a aprendizagem desperta vários processos internos de desenvolvimento. Deste ponto de vista, aprendizagem não é desenvolvimento, entretanto o aprendizado adequadamente resulta em desenvolvimento e põe em movimento vários processos que de outra forma seriam impossíveis de acontecer. (VYGOTSKY APUD ANCINELO, 2002, p. 132).

Em decorrência do pensamento de Vygotsky (2000) acredita-se que o jogo deve ser aplicado para a criança de forma coerente e responsável, pois é através dele que a criança vai desenvolver suas habilidades e vários outros processos internos, que sem o jogo seria improvável ocorrer.

As contribuições dos autores citados foram de grande relevância para que os jogos se tornassem uma importante ferramenta na aprendizagem. Logo depois, o que motivou mais ainda a busca por uma nova metodologia de ensino, foram os resultados obtidos por pesquisas em educação matemática, e conforme mostram os Parâmetros Curriculares Nacionais, há contradição entre a importância dos conhecimentos matemáticos e o desempenho da aprendizagem:

O ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina, como por parte de quem aprende: de um lado a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita frequência em relação à sua aprendizagem. (PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, 1997, p.15)

Assim, como o próprio documento apresenta, entende-se que a Matemática é uma área muito importante, pois permite relacionar e resolver problemas da vida cotidiana, tem aplicabilidade no mercado de trabalho, além da sua interdisciplinaridade com outras áreas curriculares. Já a insatisfação diante dos resultados mostra que é necessário modificar urgentemente o modo de se ensinar a disciplina. Não é viável relutar em manter o ensino tradicional engessado, onde só o professor é agente do conhecimento e o único capaz de transmitir o saber e o aluno apenas o receptor das informações, incapaz de construir o próprio aprendizado. É preciso pensar em metodologias que supram a necessidade dos alunos, tornando o conhecimento matemático acessível a todos.

O conhecimento matemático formalizado precisa, necessariamente, ser transformado para se tornar passível de ser ensinado/aprendido; ou seja, a obra e o pensamento do matemático teórico não são passíveis de comunicação direta aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência. (PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, 1997, p.30).

Desde 2004, a perspectiva do uso dos jogos aliados ao ensino de Matemática, vem ganhando respeito como metodologia pois busca facilitar o entendimento dos alunos, quebrar o tradicionalismo e trazer para sala de aula atividades práticas, onde o estudante é livre para criar, raciocinar, testar e experimentar suas

estratégias sem medo de errar ou de ser punido.

Os jogos [...] vêm ganhando espaço dentro de nossas escolas numa tentativa de trazer o lúdico para dentro da sala de aula. A pretensão da maioria dos professores com a sua utilização é a de tornar as aulas mais agradáveis com o intuito de fazer com que a aprendizagem torne-se algo fascinante. (LARA, 2004, p.1).

Logo, no contexto atual da realidade escolar, onde o professor deixa o papel de detentor do conhecimento e torna-se mediador, os jogos ganham espaço como ferramenta e auxiliam na mudança de perspectiva da sala de aula.

Para que o mesmo faça uso dos jogos na sala de aula, é preciso atentar-se aos objetivos que se quer atingir com a sua utilização. O jogo, pela perspectiva do professor, geralmente leva o aluno a buscar na própria atividade a fonte de prazer pela produção cognitiva. Agora, pelo ponto de vista do próprio aluno, é uma atividade espontânea e improdutiva em termos de construção do conhecimento, ou seja, o estudante não vê o jogo como uma ferramenta de aprendizagem e sim como uma diversão. Assim, caso a atividade desenvolvida não atinja os objetivos esperados, compromete a noção que os alunos têm sobre ele. Temos o seguinte:

A noção de jogo é tomada como uma fonte por excelência de criação e de resolução de situações-problema de Matemática para seus participantes. O jogo é visto como um instrumento de aquisição da cultura do seu contexto social, cultura que engloba conhecimentos e representação acerca da Matemática: seus valores, sua aprendizagem, seus poderes. (MUNIZ, 2014, p. 14)

Sendo assim, para o jogo ser útil no processo de ensino aprendizagem é preciso, segundo Kamii e Devries (2009, p.25): “1- Propor algo interessante e desafiador para o aluno; 2- Permitir ao

Imagem 1 - Brincar e jogar



Através das atividades pedagógicas, das brincadeiras, dos brinquedos e dos jogos as crianças se comunicam com o mundo exterior, expressando-se, descarregando suas energias, interagindo com o meio onde vivem e com sua cultura, aprendendo assim a experimentar o mundo, as possibilidades, as relações sociais e elaborar sua autonomia.

É muito comum fazer confusão quando o assunto relaciona atividade pedagógica, brincadeira, brinquedo e jogo, pois para as crianças essas são vistas como coisas muito semelhantes e cabe ao professor saber a diferença entre elas e mais que isso, saber diferenciá-las na hora da prática.

As atividades pedagógicas referem-se à prática em que o aluno desenvolve o seu conhecimento. Segundo Comênio (1649) essas atividades fazem parte das rotinas pedagógicas das crianças, de caráter lúdico e sério, ressaltando sempre a espontaneidade e o aprender que ocorre ao “fazer fazendo”.

Com isso, podemos dizer que a brincadeira é um tipo de atividade pedagógica, pois brincar implica numa proposta criativa e recreativa, desenvolvida espontaneamente e, mesmo quando sujeita a regras, estas são flexíveis e simples, e seu maior objetivo é a prática em si.

De acordo com Pereira (2001, p. 90):

Para existir o brincar precisa haver quem brinca um objeto, um tempo, um espaço e um conjunto de mecanismos que regulam uma determinada ação [...]. Brincando, busca-se alguma coisa em si mesma e na relação com o outro dando-se um sentido e uma intencionalidade aquilo que se faz.

O brincar alegre e contribui para o desenvolvimento das crianças. Dificilmente brincamos sozinhos e é nesse ponto que o brinquedo entra. Para Kishimoto (1993), o brinquedo é representado como objeto suporte da brincadeira, e, portanto, é repleto de significado para as crianças, uma vez que se torna mediador entre ela e outras crianças e entre ela e o mundo, sem esquecer que ele permite também o desenvolvimento da inteligência, sensibilidade, habilidade e da criatividade, possibilitando então, a socialização entre adultos e crianças. O brinquedo traduz o mundo para a realidade infantil.

O jogo por sua vez vem como grande aliado da atividade pedagógica, mas diferente da brincadeira, que não tem regras específicas, o jogo se constitui de regras para tornar a aprendizagem mais significativa e desafiante, e permite que a criança, colocada diante de situações lúdicas, aprenda a estrutura lógica da brincadeira e, deste modo, aprenda também a estrutura matemática.

Segundo Skonieski, Teckio e Rosa (2001, p.24) com o jogo, a criança: “1- Libera e canaliza as suas energias; 2- Pode transformar uma realidade difícil; 3- Dá vazão à fantasia, que sempre encontra no jogo, uma abertura; 4- Além disso, é uma grande fonte de prazer tanto para educadores quanto para os educandos”.

Na atualidade, com o avanço das tecnologias e com o uso de aparelhos eletrônicos, o professor tem opção de utilizar jogos virtuais como ferramentas pedagógicas. Alguns pontos importantes e positivos são que assim mostra ao estudante que há formas de se aprender na internet, que a tecnologia possibilita maior acesso ao conhecimento e ainda, caso a escola possua a alternativa, se torna uma possibilidade fazer uso do Laboratório de Informática.

Tem-se então que, mesmo que os conceitos sejam similares, a brincadeira, o brinquedo e o jogo não são iguais, apresentam diferenças em aplicação, principalmente quando utilizados em sala de aula. Entretanto, todos são muito importantes na vida das crianças e podem ser considerados como ferramentas para ler o mundo infantil, pois é através deles que a criança constrói seu mundo e consegue compreender o mundo exterior da melhor forma.

Por isso o professor precisa ter consciência da importância do seu papel em relação ao ensino-aprendizagem, uma vez que para ensinar utilizando jogos é necessário um mediador que acompanhe o processo de resolução dos estudantes, identificando suas estratégias, seus níveis de compreensão e dificuldades, tornando assim, possível que se planeje intervenções para o avanço do aluno.

3 Aspectos motivacionais dos jogos no aprendizado de Matemática

Como retratado anteriormente, muitas pessoas ao pensar em Matemática traziam, e ainda trazem consigo, um estereótipo de que é uma ciência complicada e difícil de aprender. Muitas vezes também, o seu ensino é visto como algo rigoroso e sem aplicabilidade cotidiana. Segundo Muniz (2014 p. 61):

[...] os conceitos matemáticos são, sobretudo, ligados a elementos abstratos, criados pelo pensamento humano, uma vez que o trabalho do matemático se realiza sobre um mundo abstrato, imaterial, essencialmente no campo conceitual.

Por essas razões, cada vez mais pesquisadores e teóricos da área de Educação, da área de Matemática e da área de Educação Matemática, buscam inserir os jogos como método para facilitar o aprendizado e para superar os preconceitos que os estudantes trazem para a sala de aula.

Para ajudar os alunos com ou sem dificuldades de aprendizagem, é preciso uma comunicação simples e clara, usando recursos didáticos que facilitem o entendimento de assuntos tão abstratos, como é o caso da Matemática (CAMPOS, 2015, p. 14).

Como ficou nítido no posicionamento do autor, o ensino da Matemática precisa de recursos para que a sua compreensão fique mais simples e clara. Alguns jogos não são apenas uma atividade lúdica, pois podem despertar um sentido e um significado diferentes da visão que a aula teórica traz. Aprendendo com estes tipos de jogos, dificilmente se esquece.

Não se pode deixar de considerar também que, conforme os tópicos anteriores, quando se trata do ensino para crianças

nos anos iniciais, que é o período de descoberta do mundo, de relações interiores e exteriores com tudo que lhes cerca, é nesse momento que as brincadeiras, os brinquedos e os jogos têm um papel fundamental de fazer compreender. Ainda conforme Muniz (2014 p. 61):

Devemos, na mesma intensidade, considerar que é o mundo material, concreto e real, ao menos no ensino fundamental e na educação infantil, que dá o sentido e a vida a estes elementos matemáticos, tão importantes, no processo de conceitualização.

Quando se relaciona o fato de que a Matemática é uma ciência estudada com base em abstrações e que a materialidade é essencial na compreensão de tudo àquilo que está sendo exposto ao estudante, podemos imediatamente concluir o porquê de o jogo estar recebendo tanto destaque nas comunidades acadêmicas como uma metodologia de ensino de Matemática, conforme nos aponta Mendes e Trobia (2015), e também Nascimento (2019). Quando o jogo é bem escolhido, ou até mesmo bem inventado pelo professor, traz para a aula uma materialidade que não é possível demonstrar somente através de lousa e giz.

Com base nos estudos de Muniz (2014), pode-se constatar que a maior parte dos estudantes, independentemente da idade, não veem a possibilidade de aprender Matemática com jogos, mesmo que usem conceitos aprendidos em sala de aula, pois no geral, a disciplina está associada com o trabalho escolar, fórmulas e teoremas tratados de maneira formal.

Um dos pontos importantes na etapa de escolha do jogo pelo professor para que se torne interessante, é ter conhecimento da aplicabilidade dos conceitos que ele quer desenvolver junto com a classe. Pois, dizer que a Matemática é abstrata e dizer que ela não tem utilidade muitas vezes é um sinônimo para os alunos. É preciso despertar a curiosidade e o interesse pelas ideias que estão

por trás das ações.

Como exemplo, pode-se analisar o caso do estudo dos números decimais: dizer unicamente que o que aparece representado após a vírgula é a parte “picada” do número, aparentemente não tem outra função além de complicar as realizações dos algoritmos de soma e multiplicação. Agora, quando se exemplifica supondo situações que envolvem dinheiro, a compreensão é muito mais fácil, pois é algo real, palpável e que faz parte da vida cotidiana. O uso do jogo vem com essa mesma intenção, de mostrar que mesmo quando não vista de forma explícita, a Matemática está presente em todos os momentos da vida.

Outro ponto para a seleção do jogo a ser utilizado é que não necessariamente precisa ser um jogo matemático para que ele auxilie no aprendizado dos conteúdos, pois jogos de reflexão, por exemplo, levam os jogadores a desenvolver importantes processos de matematização, como raciocínio lógico, concentração e dedução. Assim temos que:

[...] o emprego dos jogos na Educação Matemática é um recurso que pode ser usado para introduzir conceitos, revisar conteúdo ou, até mesmo, minimizar ou sanar defasagens (VIEL, et. al., 2017, p. 87).

Portanto, o jogo quando aplicado adequadamente se torna atraente aos olhos dos estudantes, motivando-os na busca constante pelo conhecimento e tornando a aprendizagem cada vez mais significativa, despertando assim o gosto pela Matemática.

4 Como se aprende com jogos

O jogo, como esclarecido anteriormente, é uma ferramenta importante para favorecer a aprendizagem e faz papel de mediador do conhecimento matemático. Portanto é relevante destacar seu papel na vida da criança. Segundo Orso (1999, p. 7) “a criança

precisa ser alguém que joga para que, mais tarde, saiba ser alguém que age, convivendo sadiamente com as regras do jogo da vida. Saber ganhar e perder deveria acompanhar a todos sempre”.

Atividades lúdicas como brincadeiras e jogos contribuem para o desenvolvimento integral da criança, pois estão vinculadas com a inteligência, a motricidade e a afetividade, pontos importantes para gerar a energia necessária para a progressão psíquica, moral e intelectual. Por isso, pode-se considerar que o jogo no contexto educativo tem potencial para alterar positiva e significativamente a prática da educação, facilitando a aprendizagem de conteúdos e proporcionando ao aluno a capacidade de pensar, discordar, testar e avaliar hipóteses, além do desenvolvimento da autonomia e da socialização.

E se engana quem pensa que o jogo pode ser utilizado de uma única maneira dentro da classe, várias são as aplicabilidades dos jogos e, inclusive, um mesmo jogo pode ter mais de uma aplicação. Um bom exemplo é o jogo Batalha Naval que estimula o pensamento estratégico e ao mesmo tempo traz as noções de coordenadas cartesianas. O professor que conhece diversos jogos certamente pode usá-los em mais de um momento, com mais de uma finalidade e trabalhando simultaneamente diversas competências e habilidades.

A aprendizagem através de jogos, como dominó, palavras cruzadas, memória e outros permite que o aluno faça da aprendizagem um processo interessante e até divertido. Para isso, eles devem ser utilizados ocasionalmente para sanar as lacunas que se produzem na atividade escolar diária. Neste sentido verificamos que há três aspectos que por si só justificam a incorporação do jogo nas aulas. São estes: o caráter lúdico, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais. (GROENWALD e TIMM, 2002, p.1).

Analisando os momentos que os jogos podem ser inseridos no processo de ensino-aprendizagem, Lara (2004), caracteriza-os em quatro tipos diferentes, sendo eles: jogos de construção, jogos de treinamento, jogos de aprofundamento e jogos estratégicos. Já levando em consideração é claro, que o jogo deve ser de caráter educacional e não apenas com a intenção de passatempo.

Ainda conforme a autora, os jogos de construção são aqueles onde um novo conteúdo, que levará à construção e formação de novos conceitos, é apresentado para os estudantes. O tema trabalhado geralmente é desconhecido ou os jogadores não sabem quase nada, o que leva os mesmos a buscarem novos conhecimentos para melhor desenvolver a atividade.

Os jogos de treinamento por sua vez, são muito úteis na prática do conteúdo já construído pois, por mais que a criança tenha assimilado os conceitos de acordo com a própria formulação de pensamento, o exercício é fundamental para que a prática, a familiarização e até mesmo a autoconfiança em relação ao domínio do assunto sejam aumentadas.

O treinamento pode auxiliar no desenvolvimento de um pensamento dedutivo ou lógico mais rápido. Muitas vezes, é através de exercícios repetitivos que o/a aluno/a percebe a existência de outro caminho de resolução que poderia ser seguido, aumentando, assim, suas possibilidades de ação e intervenção. [...] pode ser utilizado para verificar se o/a aluno/a construiu ou não determinado conhecimento, servindo como um “termômetro” que medirá o real entendimento que o/a aluno/a obteve. (LARA, 2004, p.25).

Depois, temos os jogos de aprofundamento, que são aqueles que possibilitam a aplicação dos conceitos de uma maneira mais precisa e que exija o domínio do tema já trabalhado.

Por fim, os jogos de estratégia são aqueles muito mais conhecidos, como por exemplo: Xadrez, Dama, Batalha Naval, Freecell, dentre outros, que são definidos por Lara (2004, p. 27)

como:

[...] jogos que fazem com que o/a aluno/a crie estratégias de ação para uma melhor atuação como jogador/a, onde ele/a tenha que criar hipóteses e desenvolver um pensamento sistêmico, podendo pensar múltiplas alternativas para resolver um determinado problema.

O xadrez é um jogo bem interessante para ser aplicado com os estudantes em sala de aula, pois, como exemplifica o título da imagem abaixo, ele traz muitos benefícios para os alunos, pois além de trabalhar o raciocínio lógico, estimula ainda a estratégia matemática e a sociabilidade entre as crianças, aperfeiçoando assim habilidades importantes para o seu desenvolvimento cognitivo.

Imagem 2 - Benefícios do jogo de xadrez como ferramenta pedagógica



Fonte: Secretaria da Educação – Governo do Estado de São Paulo

Dentre os demais aspectos que a autora Lara (2004), considera importantes para a classificação dos jogos e, principalmente para o seu uso em sala de aula, alguns pontos mais relevantes a se destacar é que cabe ao professor conhecer o jogo

que utilizará para que possa se preparar e levar em conta os aspectos negativos que podem surgir, evitando assim, contratempos.

O ideal é que jogos onde a sorte tem muito peso e determine quem está ganhando ou perdendo sejam evitados e que se dê prioridade àqueles onde quem desenvolver uma melhor estratégia e raciocínio tenha mais chances de se sair melhor. Estabelecer claramente as regras é outro fator de importância e caso elas sofram variações no decorrer da atividade, são tópicos que precisam estar claros a fim de não criar situações de desavença e/ou frustração por parte dos jogadores.

Mas é claro que quando o docente prepara, escolhe e desenvolve a atividade em sala de aula com consciência e transparência, além de muita responsabilidade em relação ao conteúdo que se quer ensinar, muitos são os benefícios do aprendizado que os jogos podem trazer, como vemos a seguir:

A aprendizagem envolve capacidades intelectuais, habilidades cognitivas, psicomotoras e afetivas. Para aprender, é necessário que haja motivação por parte do aprendiz, que este se interesse por uma atividade e construa saberes a partir de suas experiências. A brincadeira é um meio de aprendizagem e o jogo, um recurso valioso no processo ensino-aprendizagem (VIEL et. al., 2017, p. 87)

É preciso levar em consideração que, para o aprendizado com o uso de jogos trazer o máximo de benefícios ao aluno e ir além de unicamente desenvolver conceitos matemáticos, o professor não pode ser apenas um observador, ele deve estar atento para conduzir a atividade de modo a atingir as metas de aprendizagem, sem interferir no desenvolvimento do jogo.

A metodologia dos jogos exige alta preparação e dedicação do docente e participação dos discentes, para que aconteça da melhor maneira possível. Como nos diz Starepravo (2009, p. 49):

O jogo é, por natureza, uma atividade autotélica, ou seja, que não apresenta qualquer finalidade ou objetivo fora ou para além de si mesmo. Nesse sentido, é puramente lúdico, pois as crianças precisam ter a oportunidade de jogar pelo simples prazer de jogar, ou seja, como um momento de diversão e não de estudo. Entretanto, enquanto as crianças se divertem, jogando, o professor deve trabalhar observando como jogam. O jogo não deve ser escolhido ao acaso, mas fazer parte de um projeto de ensino do professor, que possui uma intencionalidade com essa atividade"

Por fim, pode-se ressaltar que diversos artigos acadêmicos e pesquisas realizadas na área, apresentam resultados positivos sobre o uso da metodologia de jogos, como por exemplo, o exercício do raciocínio lógico, além de estimular a criatividade, a atenção e a sociabilidade. Um dos pontos importantes é que pelo interesse, mais alunos desenvolvem a atividade e o aprendizado dos conteúdos, além de melhorar a compreensão e a fixação de conceitos. Outro bom resultado apresentado é o desenvolvimento cognitivo devido à interação realizada durante as brincadeiras. Assim pode-se ressaltar que o saber mais importante é aquele construído no decorrer da aprendizagem a partir de experiências e vivências significativas.

5 Ensinando Matemática com jogos

Na sequência, vamos mostrar algumas possibilidades de como o professor pode trabalhar o ensino de determinados conteúdos matemáticos com a metodologia de jogos. Inicialmente as autoras elaboraram planos de aula e depois selecionaram as informações mais relevantes a serem apresentadas. Todo o trabalho desenvolvido está de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017), e ainda com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997).

Os temas abordados serão: 1- Operações básicas: adição e subtração; 2- Conjunto dos Números Inteiros; 3- Inequações. A escolha do conteúdo em si foi feita de modo aleatório, após terem definido a relevância de trazer assuntos estudados em diferentes períodos escolares, com alunos de faixas etárias distintas.

Para desenvolver todo o conteúdo de cada um dos itens, serão necessárias mais de uma aula. A sugestão apresentada de jogo pode ser utilizada em ocasiões diferentes do processo de ensino-aprendizagem, ficando a critério de cada professor analisar o melhor momento de colocar a metodologia em prática, levando em consideração os objetivos que deseja atingir e o conjunto das demais aulas sobre o mesmo tema. No momento do uso da metodologia, consideramos importante que o professor se atente a dois fatores:

1. O que os alunos já sabem e o que eles descobrem com o jogo;
2. O que eles não sabem e não conseguem desenvolver sem auxílio.

Caso o professor opte por usar o jogo como forma de apresentação e familiarização dos estudantes com o conteúdo, aplicando logo na primeira aula sobre o tema, nas seguintes poderá fazer uma mescla de teoria com repetição do jogo da primeira aula. Assim, é possível reforçar e introduzir os conceitos e, depois, poderá comprovar se houve aprendizado ao jogar novamente.

Na sequência, há a opção de praticar outro jogo sobre o conteúdo, que o professor deve escolher com a intenção de sanar as defasagens no aprendizado, que ele observou com as duas aplicações anteriores e de modo a reforçar a parte teórica que ele esclareceu. É importante verificar se há a participação de todos e, principalmente, como cada um se comporta. Para assegurar que o aprendizado está acontecendo, iremos sugerir que seja elaborado

exercícios extraclasse. Já na quarta aula o professor poderá corrigir os exercícios e sanar dúvidas apresentadas. No final poderá repetir um dos jogos ou realizar outro tipo de atividade, que não necessariamente precisa ser um jogo, que considere válida dentro do contexto que estiver trabalhando.

Quadro 1 - Plano de aula sobre: Operações básicas: adição e subtração

BINGO DAS OPERAÇÕES	
Componente Curricular: Matemática	Nível: Ensino Fundamental Anos Iniciais
Habilidades (BNCC): (EFD1MA08) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até dois algarismos, com os significados de juntar, acrescentar, separar e retirar, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.	
Objetivo: Aprender a resolver problemas de adição e subtração utilizando o conceito de juntar, acrescentar, retirar e separar; aprender a trabalhar em equipe.	
Conteúdos: Operações básicas: adição e subtração.	
Descrição do jogo: Bingo das operações é um jogo de treinamento que permite aos estudantes relembrar e fixar os conteúdos já estudados.	
Material utilizado: O professor precisará de 20 palitos de picolé (coloridos ou não) para cada jogador e de tampinhas de garrafa suficientes para preencher toda a cartela de cada jogador. Deverá confeccionar o jogo da seguinte forma: elaborar cartelas de bingo com os números que serão os resultados das operações; elaborar as cartas com as operações matemáticas de adição e subtração cujos resultados estão nas cartelas.	
Regras do jogo: O bingo das operações será realizado da seguinte forma: O professor vai distribuir aos alunos as cartelas de bingo, as tampinhas e 20 palitos para cada um. Ficará com as 20 cartas das operações de adição e subtração em mãos. Sorteará uma carta em cada rodada, e assim, o aluno terá que realizar a operação sorteada usando os palitos de picolé. Após obter o resultado, o jogador vai procurar na cartela do bingo se tem ou não o número encontrado e caso tenha, marcará com a tampinha de garrafa. Quem completar a cartela deverá dizer Bingo! e apresentar a mesma para o professor conferir. Poderá haver um brinde especial para o primeiro lugar e brindes de participação para os demais alunos.	

Fonte: elaborado pelas autoras

Quadro 2 - Plano de aula sobre: Conjunto dos Números Inteiros

TERMÔMETRO MALUCO	
Componente Curricular: Matemática	Nível: Ensino Fundamental Anos Finais
Habilidades (BNCC): (EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração	
Objetivo: Utilizar os números inteiros para realizar operações de adição e subtração, com o intuito de aplicar o resultado na reta numerada, considerando o valor absoluto do número e o seu sinal.	
Conteúdos: Números inteiros e a reta numérica	
Descrição do jogo: <i>Termômetro Maluco</i> é um jogo de construção que permite aos estudantes a associação dos próprios conhecimentos com o conteúdo matemático.	
Material utilizado: Desenhar no pátio, com giz, um ou mais tabuleiros, conforme ilustração anexa ao final; para cada tabuleiro desenhado, imprimir ou desenhar um conjunto de 36 cartas, sendo três cartas com a palavra "oposta" e três cartas de cada um dos seguintes números: 0; -1; -2; -3; -4; -5; +1; +2; +3; +4 e +5.	
Regras do jogo: Inicialmente, a professora levará os alunos até o pátio da escola, onde o tabuleiro do jogo já estará desenhado. É interessante desenhar mais de um tabuleiro para que várias equipes joguem simultaneamente. Faz-se a divisão dos grupos que devem ser formados por dois ou três alunos e por fim apresenta-se as seguintes regras: 1- Cada grupo utiliza um tabuleiro e um conjunto de 30 cartas, que devem ser embaralhadas e colocadas ao lado do tabuleiro, sendo que as faces ficam voltadas para baixo no monte; 2- Para iniciar, cada jogador compra uma carta no monte e, sendo que ele próprio será o marcador, se dirige ao tabuleiro: se o valor da carta for positivo, ele avança; se for negativo, ele recua; se for zero, ele se mantém onde estava e, por fim, se for a palavra oposta, ele deverá se dirigir ao oposto numérico da casa em que estiver; 3- O jogo continua dessa forma, cada vez um tira uma carta e segue do ponto de onde está; 4- Caso o jogador atinja a casa de -35 fica congelado ou seja, fora do jogo; 5- Existem três jeitos de ganhar, sendo eles: a) o primeiro jogador que chegar a casa +35; b) o último jogador que ficar no tabuleiro, caso os outros sejam congelados; c) o jogador que, se acabarem as cartas, estiver mais quente, ou seja, na casa positiva de maior valor numérico.	

Fonte: elaborado pelas autoras

Imagem 3 - Tabuleiro do jogo Termômetro Maluco



Fonte: Urbano, 2016

Quadro 3 - Plano de aula sobre: Inequações

DOMINÓ DAS INEQUAÇÕES	
Componente Curricular: Matemática	Nível: Ensino Fundamental Anos Finais
Habilidades (PCN's): Tradução de situações-problema por equações ou inequações do primeiro grau, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.	
Objetivo: Resolver mentalmente inequações de primeiro grau, utilizando os conceitos de menor, maior e diferente, com o propósito de participar do jogo.	
Conteúdos: Resolução de inequações do primeiro grau com as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão.	
Descrição do jogo: Dominó das Inequações é um jogo de treinamento que permite aos estudantes relembrem e fixarem os conteúdos já estudados.	
Material utilizado: O professor deverá confeccionar o jogo da seguinte forma: elaborar 20 inequações que são possíveis para os alunos resolvê-las mentalmente e anotar suas respostas. Cada peça de dominó deverá ter em um lado uma inequação e do outro uma resposta cuja inequação esteja em outra peça.	

Regras do jogo: As mesmas do Dominó tradicional: serão dois participantes, cada um recebe 10 peças e o jogador que tiver a peça $X \neq 0$ inicia a partida. O outro jogador encaixa uma peça de modo que a inequação esteja ligada à sua resposta ou vice-versa. Assim sucessivamente e, caso o jogador não consiga encaixar nenhuma peça no momento, passa a vez. Ganha aquele que encaixar todas as peças primeiro. Caso o jogo seja "fechado", quando não fica nenhuma peça livre para ser ligada com uma inequação ou com um resultado, vence aquele que possuir menos peças na mão.

Fonte: elaborado pelas autoras

6 Considerações finais

Como discurremos ao longo do artigo, as brincadeiras e jogos estão presentes na educação há muito tempo, não são uma novidade ou mesmo uma tendência pedagógica como muitos acreditam. Na Grécia Antiga, diferentes pensadores como Aristóteles e Platão, ressaltaram a importância de jogos lúdicos no processo de formação da criança.

E na atualidade, após muita evolução nas pesquisas relacionadas à área educacional, há diversos estudos, citados ao longo do texto, onde se comprova que as crianças, ao entrarem em contato com as brincadeiras, manifestam habilidades inesperadas pela sua idade, enfatizando a sua importância como ferramenta no ensino.

Analisando os momentos em que os jogos podem ser incluídos no processo de aprendizagem, a classificação e suas aplicações no ensino e todos os resultados positivos que experiências de outros pesquisadores apresentaram, foram desenvolvidos três planos de aula com a metodologia de jogos aplicada no ensino de Matemática.

Fez-se a escolha de temas relevantes e que são estudados em faixas etárias diferentes, a fim de evidenciar que os jogos não são exclusivos para as fases iniciais do ensino, como o *Bingo das*

Operações, mas que também podem ser aplicados com estudantes dos anos finais do ensino fundamental, como o *Termômetro Maluco*, e com conteúdo considerado mais difícil pelos estudantes, exemplo do *Dominó das Inequações*.

Por fim, acredita-se que é evidente a importância de novas metodologias para o ensino de Matemática, especialmente como a de jogos, que estimula o interesse pela atividade e auxilia no desenvolvimento das capacidades intelectuais, habilidades cognitivas, psicomotoras e afetivas, tornando-se para o professor, um recurso valioso no processo de ensino-aprendizagem.

O artigo foi elaborado em tempos de pandemia causada pela Covid-19, o que impossibilitou as autoras, até o momento, de levarem as propostas dos planos de aula para aplicação prática com estudantes, a fim de poder coletar dados quantitativos e/ou qualitativos sobre os resultados de toda a teoria estudada. Mas certamente há o interesse de por em prática no momento que for possível e surgir a oportunidade.

Referências

ANCINELO, Patrícia Raffin. O papel dos jogos lúdicos na educação contemporânea. Artigo acadêmico. Disponível em: <https://docplayer.com.br/8224703-O-papel-dos-jogos-ludicos-na-educacao-contemporanea.html>. Acesso em: 26 de outubro de 2020.

ARCE, Alessandra. *O jogo e o desenvolvimento infantil na teoria da atividade e no pensamento educacional de Friedrich Froebel*. Revista digital. Disponível em: <https://siteantigo.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/idiomas/brincar-o-jogo-e-o-desenvolvimento-infantil-na-teoria-da-atividade/5756> Acesso em 24 de outubro de 2020.

AZEVEDO, Maria Edith de. *Apresentação do trabalho matemático pelo sistema montessoriano*. Revista de Educação e Matemática, n. 3, 1979.

BACCHINI, Isabela Furtado. *O lugar do brincar no desenvolvimento infantil: diálogos com a aliança pela infância*. 2017. Artigo acadêmico. Disponível em: <http://www.ufjf.br/pedagogia/files/2017/12/O-lugar->

do-Brincar-no-desenvolvimento-Infantil-Di%C3%A1logos-com-a-alian%C3%A7a-pela-inf%C3%A2ncia.pdf. Acesso em 07 de março de 2020.

BARBOSA, Sandra Lucia Piola. *Jogos matemáticos como metodologia de ensino-aprendizagem das operações com números inteiros*. 2008. Projeto de Intervenção Pedagógica apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1948-6.pdf>. Acesso em 28 de março de 2020.

BÖHM, Ottopaulo. *Jogo, brinquedo e brincadeira na educação*. 2017. Artigo acadêmico. Disponível em: <http://www.uniedu.sed.sc.gov.br/wp-content/uploads/2017/02/Ottopaulo-B%C3%B6hm.pdf>. Acesso em 28 de março de 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular: educação é a base*. Brasília: SEB, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

COMÊNIO, João Amós. *Didática Magna*. Tradução de Nair Fortes Abu-Merky. Rio de Janeiro: Organização Simões, 1954.

CRIANÇA, jogos, brinquedos e brincadeiras no aprendizado da. Disponível em: <https://educador.brasilecola.uol.com.br/sugestoes-pais-professores/jogos-brinquedos-brincadeiras-no-aprendizado-crianca.htm>. Acesso em 07 de setembro de 2020.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Benefícios do jogo de xadrez como ferramenta pedagógica*. São Paulo, 2018. Notícia. Disponível em: <https://www.educacao.sp.gov.br/noticias/beneficios-jogo-de-xadrez-como-ferramenta-pedagogica>. Acesso em 07 de setembro de 2020.

GROENWALD, Cláudia Lisete Oliveira. TIMM, Úrsula Tatiana. *Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula*. Artigo acadêmico. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/artigos/a1/p5.php>. Acesso em 01 de novembro de 2020.

JOGO definição dos termos – Brinquedo, brincadeira e. Revista digital. Disponível em: <https://siteantigo.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/educacao/definicao-dos-termos-brinquedo-brincadeira-e-jogo/35529>. Acesso em 28 de março de 2020.

KAMII, Constance. DEVRIES, Rheta. *Jogos em Grupo na educação*

infantil: implicações da Teoria de Piaget. Tradução de Marina Célia Dias Carrasqueira. 1. ed. São Paulo: Trajetória Cultural, 1991.

_____. *Jogos em grupo na educação infantil: implicações da teoria de Piaget*. Prefácio Jean Piaget. Tradução Marina Célia Dias Carrasqueira. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

KISHIMOTO, TizukoMorchida. *Brinquedos e brincadeiras na educação infantil*. 2010. Artigo acadêmico. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2010-pdf/7155-2-3-brinquedos-brincadeiras-tizuko-morchida/file>. Acesso em 28 de março de 2020.

_____. *Jogos infantis: o jogo, a criança e a educação*. 6. ed. Petrópolis: Editora Vozes, 1993.

LARA, Isabel Cristina Machado de. *Jogando com a matemática na Educação Infantil e Séries Iniciais*. São Paulo: Editora Rêspel, 2005.

_____. *Jogando com a Matemática de 5ª a 8ª série*. São Paulo: Rêspel, 2004.

MUNIZ, Cristiano Alberto. *Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação Matemática*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.

NASCIMENTO, Maria Wirma Da Costa et al. *Jogos didáticos como estratégia metodológica de revisão de estudos de ciências com alunos do fundamental II*. Campina Grande: Realize Editora, 2019. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/60885>. Acesso em: 26 de outubro de 2020.

PEREIRA, Eugênio Tadeu. *Brincar, Brinquedo, Brincadeira, Jogo, Lúdico*. Belo Horizonte: 2001 (Coleção Presença Pedagógica, 7).

SKONIESKI, Luciani Carini; TECKIO, Patrícia Figueira; ROSA, Nera Lúcia da. *Jogos Infantis: Alternativa pedagógica de desenvolvimento e aprendizagem*. Cruz Alta: 2001.

STAREPRAVO, Ana Ruth. *Jogando com a Matemática: números e operações*. 1. ed. Curitiba: Editora Anymar, 2009.

TROBIA, Isabelle Alves. MENDES, Luiz Otávio Rodrigues. *Jogos uma metodologia para o ensino e aprendizagem de Matemática no ensino fundamental*. 2015. Artigo acadêmico. Disponível em: <http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/JOGOS-UMA-METODOLOGIA-PARA-O-ENSINO-E-APRENDIZAGEM-DE-MATEM%C3%81TICA-NO-ENSINO-FUNDAMENTAL.pdf>. Acesso em 07 de março de 2021.

2020.

URBANO, A.F. Termômetro Maluco. Projeto LEM, 2016. Disponível em: <http://emef-marina.blogspot.com/2016/07/termometro-maluco.html>. Acesso em: 12 abr. 2020.

VIEL, Silvia Regina. et. al. *O PIBID na escola: a formação do aluno em três dimensões*. Franca (SP): UniFacef, 2017.

VOLPATO, Gildo. *Jogo, brincadeira e brinquedo: usos e significados no contexto escolar e familiar*. 2. ed. Criciúma: UNESC, 2017.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. *A construção do pensamento e da linguagem*. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

METODOLOGIA ATIVA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Aline Rosa Rodrigues
Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF
alinerosarodrigues12@gmail.com

Bianca Cecília Silva
Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF
biancaceciliasilva@hotmail.com

Sílvia Regina Viel
Doutora em Educação Matemática e Docente Uni-FACEF
silviarviel@gmail.com

1 Introdução

Para compreender melhor este artigo, é importante discernir o que é de método e metodologia, apesar de parecer à mesma coisa, existe uma diferença entre ambos.

Segundo o dicionário, método é a técnica utilizada para o ensino de uma disciplina, o caminho pelo qual se atingi um objetivo. Já para Roberto Jarry Richardson (1985), método é a escolha organizada de procedimentos para explicação de um acontecimento.

Metodologia, conforme o dicionário online de Português é a reunião de métodos; processo organizado de pesquisa e de investigação. Segundo Barros (1986), a metodologia é o estudo e análise de vários métodos a fim de verificar se estes se aplicam a utilização esperada.

Levando em consideração as informações acima, pode-se concluir que há diferença entre método e metodologia, e a compreensão desta diferença é de suma importância para o entendimento do assunto que irá ser abordado neste artigo.

A metodologia tradicional, também conhecida como educação bancária, foi predominante até o século XVII, no entanto,

nesse período já haviam estudiosos que utilizavam recursos diferentes para ensinar. Comenius é um exemplo, ele tinha um método diferente, chamado de Didática Magna, que preconizava o ensinar sem trazer um peso para o aluno ou professor, isto é, ambos têm prazer em aprender.

"Nós ousamos prometer uma Didática Magna, isto é, um método universal de ensinar tudo a todos. E de ensinar com tal certeza, que seja impossível não conseguir bons resultados. E de ensinar rapidamente, ou seja, sem nenhum enfado e sem nenhum aborrecimento para os alunos e para os professores, mas antes com sumo prazer para uns e para outros. E de ensinar solidamente, não superficialmente e apenas com palavras, mas encaminhando os alunos para uma verdadeira instrução, para os bons costumes e para a piedade sincera." (COMENIUS, 2021, p. 13)

Já os métodos ativos, segundo Abreu (2009), seus primeiros indícios encontram-se na obra Emilio de Jean-Jacques Rousseau, que foi publicada em 1762. Nesta obra Rousseau dizia que a criança é um ser curioso e com prazeres específicos e, cabe ao professor provocar e preservar a curiosidade do estudante. Sendo assim, o estudante começa a ser o protagonista do seu processo de aprendizagem.

Nesta mesma visão de introduzir métodos ativos na educação, em meados do século XX, John Dewey trouxe uma metodologia baseada nas experiências, a princípio chamada de "teoria da investigação", que dava aos educadores uma tarefa de reincorporar os temas de estudo nas experiências, com uma investigação onde várias hipóteses eram examinadas. Dewey (2010) notava a necessidade de que jovens e crianças não fossem somente ouvintes, mas que pudessem se engajar em sala de aula. E atualmente essa carência de uma nova educação tem se acentuado, temos adolescentes que são nativos digitais, têm mais acesso à tecnologia e à informação e estão sempre conectados.

Por isso, necessitam de metodologias de ensino modernas e inovadoras, capazes de despertar a sua curiosidade com uma aula dinâmica e interativa.

O principal objetivo dessa metodologia que será abordada é apoiar os estudantes para que aprendam de forma autônoma e eficaz, partindo de problemas e situações do cotidiano. Assim, o aluno deixa de ser um agente passivo na aprendizagem, que apenas escuta o que é ensinado, e passa a ser o protagonista na construção do conhecimento e o centro do processo.

“Acho que a educação frequentemente cria antas: pessoas que não se atrevem a sair das trilhas aprendidas, por medo da onça. De suas trilhas sabem tudo, os mínimos detalhes, especialistas. Mas o resto da floresta permanece desconhecido.” (ALVES, 2012, p. 31)

É preciso criar condições para que todos os alunos possam desenvolver suas habilidades e aprenderem os conteúdos necessários à vida social, de forma prazerosa e espontânea, além de buscar novas soluções, em que se possam explorar dessas situações e estimularem novas estratégias para compreender a realidade. Desta forma, é necessário inspirar e influenciar o desempenho dos estudantes na escola, desenvolvendo mecanismos de participação, para mostrar que o compromisso de todos coopera na qualificação do ensino e facilita todo processo de aprendizagem.

A metodologia ativa tem o potencial de despertar a curiosidade, valorizando, portanto, as contribuições dos alunos nas aulas. Assim, são estimulados os sentimentos de engajamento, competência e responsabilidade, além da motivação nos estudos, tendo como intenção aproximá-lo de sua autonomia em sala de aula e fora dela.

2 Educação Ativa

Desde o nascimento e ao longo da vida, aprendemos ativamente, enfrentando desafios em diversas áreas (profissionais, pessoais e sociais), desafios que ampliam a cognição, conhecimentos e habilidades. A vida é um processo ativo de aprendizagem, com desafios cada vez mais complexos. Desse modo, aprendizagem passiva é importante, mas a aprendizagem por questionamento e experimentação é mais relevante ainda, para conseguir correlacionar a teoria com a realidade.

“A aprendizagem é ativa e significativa quando avançamos em espiral, de níveis mais simples para mais complexos de conhecimento e competências em todas as dimensões da vida.” (MORAN, epígrafe, 2018)

Quando o acesso às informações era mais restrito, o método tradicional era propício, assim o professor transmitia as informações e por isso se tornava muito significativo. Hoje por meio da Internet e das tecnologias, podemos estudar com muitas pessoas diferentes em qualquer lugar e a qualquer hora. Sendo assim, para aprender existe uma enorme flexibilidade e possibilidade em uma sociedade altamente conectada.

As mudanças sociais nas últimas décadas são inegáveis, portanto, diante dessas mudanças, as escolas e sistema educacional estão vivendo um momento de constante adaptação. Este movimento traz à tona a discussão sobre o papel dos alunos no processo de ensino.

De acordo com o educador Paulo Freire (2015), um dos maiores problemas da educação é o fato dos alunos não serem incentivados para um pensamento independente. Para amenizar essa situação, o professor deve proporcionar um ambiente em que o aluno possa refletir e reconhecer seus ideais, expressando seus pontos de vista e opiniões. Tudo isso é importante para

que os estudantes possam aprender diversas maneiras de ver determinadas situações.

O método ativo é um conceito educacional que pode estimular o processo de ensino crítico e reflexivo, em que os alunos têm papel ativo e responsabilidade por sua própria aprendizagem.

“O ideal da educação não é aprender ao máximo, maximizar os resultados, mas é antes de tudo aprender a aprender, é aprender a se desenvolver e aprender a continuar a se desenvolver depois da escola.” (PIAGET, 1977, p. 225)

Assim, as metodologias ativas enfatizam o papel protagonista do aluno, seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, sob a orientação do professor.

O intuito desta metodologia é permitir que o aluno possa ser mais participativo no seu processo de aprendizagem. Ao utilizar métodos que estimulem a interação entre professor e aluno, bem como por meio de materiais e recursos didáticos, o estudante desenvolve a autonomia no processo de aprendizagem e tem um conhecimento significativo, sendo que não aprenderá pela experiência do professor, e sim pela sua própria vivência.

Nesta metodologia é importante investir em aplicar os conteúdos de forma em que se atraia a atenção do aluno e ele possa relacionar-se com os colegas e com o professor. O professor consegue despertar a curiosidade no estudante quando se apresenta o conteúdo a ser estudado, ele usa das experiências vividas pelos discentes para começar a explicação, desta forma se consegue uma comunicação maior com os estudantes.

Segundo Moran (2015, p.17) as metodologias precisam acompanhar os objetivos pretendidos. Se o intuito é o aluno ser proativo, precisam-se adotar metodologias em que o envolva em atividades cada vez mais difíceis, em que tenham que tomar

decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais didáticos necessários. Caso o intuito seja estimular a criatividade do aluno, é imprescindível utilizar métodos que possibilitem ao estudante colocar sua imaginação em ação. Educar com as metodologias ativas é levar o discente ao ápice da aprendizagem.

3 Ensino-Aprendizagem na Metodologia Ativa

No ensino com a metodologia ativa, o intuito é que o estudante busque seu próprio conhecimento, desta forma há métodos para que possa tornar esse discente ativo em seu ensino-aprendizagem.

Iremos apresentar algumas práticas de ensino-aprendizagem para a aplicação dentro de sala de aula.

I - APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS

Tem como propósito fazer com que os estudantes aprendam através da resolução de problemas. Essa forma de aprendizagem incentiva a habilidade de investigar, refletir e criar soluções para situações problemas dentro do tema a ser abordado e ao explorar essas soluções pode-se utilizar de inúmeras ferramentas e tecnologias.

Figura 1 - Esquema aprendizagem baseada em problemas



Fonte: VIEIRA, Marta; PANÚNCIO-PINTO, Maria. 2015.

Nesta prática, o professor apresenta o tema a ser trabalhado em forma de um problema, coloca os estudantes em uma discussão para ver o que eles já conhecem, é valorizado o conhecimento prévio do aluno, esta discussão é fomentada por questionamentos do docente sobre o assunto.

Em um segundo momento o estudante é estimulado a ir pesquisar sobre o tema e trazer para sala de aula novas informações, neste momento pode-se usar da tecnologia a favor do professor na sala de aula. Após a pesquisa, com o estudante tendo mais informações, o professor que atua como mediador, começa com questionamentos mais intrigantes para fazer com que o aluno chegue ao ápice do seu conhecimento e traga a resolução do problema proposto.

No final, o professor traz um feedback para os discentes sobre o que eles aprenderam e acrescenta mais conhecimento, caso os estudantes não tenham chegado no objetivo esperado para aquela resolução de problemas.

II - APRENDIZAGEM BASEADA EM PROJETOS

Figura 2 - Esquema aprendizagem baseada em projetos



Fonte: Aprender por projetos com a biblioteca escolar, 2021

Diferente da aprendizagem baseada em problemas, que foca na parte teórica do problema, a aprendizagem baseada em projetos permite que os alunos coloquem a “mão na massa”, realizando projetos para a resolução do problema proposto. Nesta prática permite que o aluno adquira conhecimento através do trabalho em grupo, desenvolva sua liderança, cooperativismo, senso crítico e um perfil investigativo. Para a realização do projeto, o estudante poderá usar das ferramentas que achar necessárias para a resolução do problema.

O professor que atua como mediador nessa aprendizagem, tem a responsabilidade de dar feedbacks para que o discente não saia do objetivo principal daquela aula. O docente não pode dar a resolução do problema, contudo pode ir dando direcionamento para os estudantes. Não se pode esquecer que esses projetos são sempre fundamentados em conteúdo que estão sendo trabalhados com os alunos e no objetivo que o professor tenha para aquela aula.

III - GAMIFICAÇÃO

Figura 3 - Esquema gamificação na sala de aula



Fonte: SILVA, João Batista da, 2019.

Gamificação pode ser definida como o uso de elementos ou técnicas de design de jogo em contextos diferentes do ambiente da sala de aula. Na verdade, visa definir e aplicar os aspectos de uma situação ou problema, levando os estudantes a usar estratégias e técnicas para um objetivo comum.

Essa prática aproveita os desejos naturais que todos nós temos e que são estimulados durante o jogo. A questão é que, na busca pela vitória e pelo sucesso, o aluno trabalha com competição, conquista, plenitude, status, cooperação, sensações amplamente exploradas pelos jogos.

Nesse sentido, estratégia de utilização de elementos do jogo também tem sido explorada na educação com o objetivo de melhorar o processo de aprendizagem.

IV. SALA DE AULA INVERTIDA

Se na modalidade tradicional, o professor da aula expositiva explica o livro didático no quadro para que os alunos façam os deveres sozinhos, então na sala de aula invertida temos a inversão dessa lógica. Primeiro, os alunos antes e depois da aula estudam os conceitos básicos com a turma, discutem os conhecimentos adquiridos e tiram suas eventuais dúvidas e revisam o conteúdo com orientação do professor.

Nesse modelo, o discente tem acesso ao conteúdo antes de estar em sala de aula, para que o tempo seja otimizado, fazendo com que tenham um conhecimento prévio do assunto a ser estudado e discutam com os outros alunos para resolverem os problemas e realizarem projetos. Isso faz com que os alunos se interessem mais pela aula e participem de forma eficaz. Para José Moran (2018), esse método é fundamental para abrir a escola ao mundo e ao mesmo tempo trazer o mundo para escola.

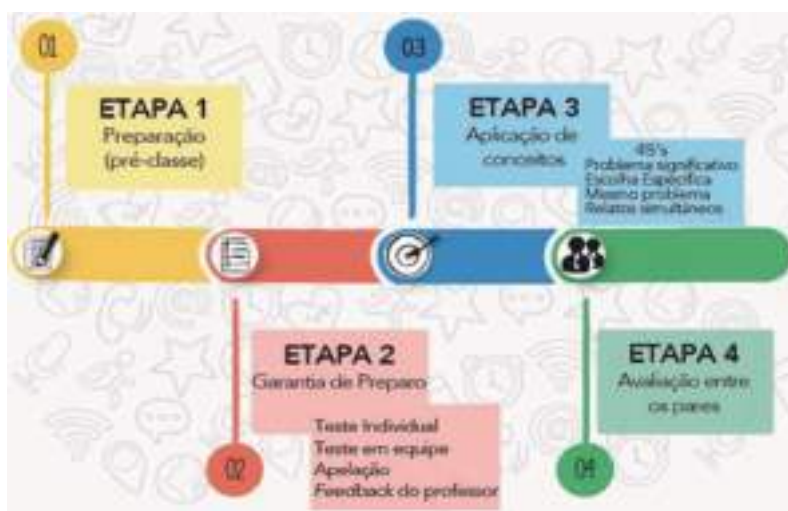
Figura 4 - Como funciona a sala de aula invertida



Fonte: GOOGLE - Edtech, 2021

V. APRENDIZAGEM ENTRE PARES OU TIMES

Figura 5 - Etapas da aprendizagem entre pares ou times



Fonte: OLIVEIRA, 2018

Como o nome já sugere, é uma aprendizagem entre colegas e equipes. Tem por finalidade a formação de equipes para compartilhar ideias. Pode-se trabalhar com um estudo de caso, no qual os alunos resolvam os desafios de forma colaborativa, aprendendo uns com os outros, empenhando em discussões e

reflexões entre os grupos, e desta forma começam a refletir sobre o assunto proposto de uma maneira diferente, de forma crítica.

Afinal, com a ajuda mútua, é possível aprender e ensinar ao mesmo tempo a formar o pensamento crítico, que se firma por meio de discussões sólidas e levando em consideração diferentes opiniões.

VI. PROBLEMATIZAÇÃO

Figura 6 - Esquema problematização



Fonte: Revista da Escola Adventista, 2017.

A problematização, em primeiro lugar, incentiva os alunos a observarem a realidade de forma crítica, para que possam relacionar o dia a dia com a matéria em estudo. Esta observação mais focada permitirá que os alunos percebam aspectos interessantes para si. Com base em conhecimentos prévios, alunos e professores serão capazes de compreender e analisar os problemas reais.

Isto é uma concepção do ato do conhecimento através da

investigação direta da realidade, que é dividido em cinco passos: observação da realidade social, encontrar os pontos-chave fazendo os alunos refletirem sobre possíveis causas da existência daquele problema de estudo, a teorização com a busca de informações sobre o assunto ou problema escolhido, depois de ter o conhecimento do assunto a ser trabalhado em forma de problema, o grupo levanta hipóteses para solucioná-lo dentro do nível de complexidade atual e toma decisões quanto ao plano de ação para intervir na realidade e por último à aplicação das decisões na realidade.

4 O ensino da matemática por meio da Metodologia Ativa

Os conteúdos matemáticos são, na maioria das vezes, considerados complicados pelos estudantes, que é um dos motivos para o desagrado com a disciplina. Mesmo não conhecendo, os alunos apresentam alguma resistência a ela, por conta de crenças e costumes sociais e culturais. Impedindo-os de perceber que a matemática é uma parte indispensável de suas vidas.

A forma tradicional do conteúdo ser ensinado conduz a essa concepção errônea adotada sobre a matemática. Muitos consideram que a matemática é exata e só pode ser ensinada e realizada de uma forma, mas não é exatamente assim, podemos ensiná-la de forma descontraída e divertida, sempre sendo contextualizada e colocada na realidade do estudante.

“Pesquisas recentes afirmam que, em todos os níveis, os estudantes devem aprender a se comunicar matematicamente, que os professores devem estimular o espírito de questionamento e levar os seus alunos a pensar a comunicar ideias.” (SMOLE, 2008, p.112).

É de suma importância encontrar métodos diferentes dos usuais, que possam inspirar e motivar os estudantes a resolver tais

problemas e conectar a matemática às situações cotidianas para promover a compreensão dos enunciados. As aulas de matemática também são importantes para a formação acadêmica e profissional dos alunos, nesse sentido, não é só praticar a memorização de fórmulas, mas estimular os alunos a questionarem o porquê dos resultados obtidos e se estão corretos.

Assim, iremos apresentar, dois conteúdos matemáticos utilizando a metodologia ativa, para que fique evidenciado que não é necessário a complexidade para aplicação da metodologia ativa no ensino da matemática. Apesar de aplicarmos nesse artigo a metodologia ativa apenas em dois conteúdos, é possível aplicação desta em todos os conteúdos matemáticos.

4.1 Aplicando a aprendizagem baseada em problemas (PBL)

A aprendizagem baseada em problemas, conforme já apresentamos, é fundamentada nos conceitos do filósofo John Dewey e do psicólogo Jerome Seymour. O primeiro afirmava que a educação é alicerçada nas experiências que os estudantes adquirem ao longo de sua vida, que seu aprendizado não vem apenas pela memorização do conteúdo, mas sim do realizar. Seymour, por sua vez, afirmava que a educação deve colocar os discentes em contato com os problemas e incentivá-los, através da interação com os colegas, a solucionar estes problemas.

Trabalhando com ABP fazemos com que os estudantes se tornem autônomos, aumenta-se o senso de responsabilidade e desenvolve-se a capacidade do trabalho com os colegas. E são essas habilidades que esperamos dos estudantes na aula que preparamos para ensinar Probabilidade e Estática para alunos do 8º Ano. Segue abaixo, o plano de aula preparado para o ensino de Probabilidade e Estatística usando a Aprendizagem baseada em problemas.

Quadro 1 - Plano de aula: Probabilidade e Estatística

Turma: 1º EM B / MANHÃ
Tema: PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA
OBJETIVOS: O objetivo dessa aula é mostrar para o estudante que a PROBABILIDADE E A ESTATÍSTICA estão em questões cotidianas e interpretar informações fornecidas por intermédio de diferentes linguagens, com a finalidade de calcular e associar um valor de probabilidade a uma situação-problema.
DURAÇÃO: 2 AULAS DUPLAS (4 AULAS)
COMPETÊNCIAS E HABILIDADES: (EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.) (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
RECURSOS DIDÁTICOS: • Conhecimento prévio de probabilidade e estatística • Situação problema • Material pesquisado previamente pelos alunos
REFERÊNCIAS: https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/sites/7/2020/08/CURR%C3%8DCULO%20PAULISTA%20etape%20Ensino%20M%C3%A9dio.pdf

Fonte: Elaborado pelas autoras

Na primeira aula, será explicado para os estudantes como irão funcionar as aulas seguintes, que nosso intuito não é dar uma aula expositiva sobre o tema, mas sim fazer com que eles explorem os conhecimentos já adquiridos no passar dos anos. O nosso papel como professor é a todo momento incentivar o uso do conhecimento prévio de nossos estudantes e é dessa forma que será mostrado como as demais aulas irão funcionar.

Após a explicação, será solicitado aos alunos para que se

separem em grupos de 10 a 12 pessoas (se possível, fazer com que os grupos tenham a mesma quantidade de integrantes) e cada grupo irá escolher um Coordenador, o papel desse coordenador é orientar o grupo, fazer com que todos tenham oportunidade de expressar seu ponto de vista. Terá que ser escolhido pelo grupo também um Relator, que irá representar toda a sua equipe na hora de apresentar as ideias obtidas através das discussões para os outros grupos e para o professor.

Em seguida, acontecerá a apresentação do seguinte problema para que os mesmos, através de seus conhecimentos prévios e pesquisas, consigam solucioná-lo:

A SORTE!

Arthur e quatro amigos gostavam de jogos de apostas. Todos os finais de semana iam à mesma casa de apostas da cidade em que moravam. Numa certa noite decidiram levar a mesma quantidade de dinheiro para apostar.

Cada um deles com R\$ 500,00, fizeram as seguintes opções: Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos; Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos; Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos; 1 Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos; Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

Como já era de costume ir naquela casa de apostas, todos já conheciam as regras de apostas do lugar. Que eram as seguintes:

Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela. O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade

de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	Preço da cartela (R\$)
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

Antes mesmo de sair os resultados da premiação, decidiram verificar quais seriam os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados.

Após a apresentação do problema, será realizado a leitura em conjunto com toda a sala e então começarão as etapas do PBL. Em um primeiro momento os grupos irão verificar se há no texto apresentado algo que eles não conheçam, caso tenha, o nosso papel como tutor não é dar a resposta, mas sim fazer perguntas que façam com que os estudantes consigam chegar ao resultado. Caso não tenha, já podem ir para a segunda etapa que é analisar pontos chaves e o intuito central do texto, ou seja, eles terão que averiguar o que o texto dá de informações que poderá ajudá-los a solucionar o problema proposto.

Com os pontos chaves, agora será realizada uma discussão com todos os grupos sobre como se poderá decifrar o problema com todo o conhecimento que eles já têm sobre o assunto. Nesse momento é importante, o professor/tutor explicar que nessa parte da aula não será permitido o uso de celulares ou materiais para auxiliá-los na discussão, será permitido apenas o conhecimento deles, o que já aprenderam ao longo dos anos. É nesse momento que ocorre o Brain Storm (Tempestade de Conhecimentos) e nós como tutores conseguimos verificar o que os estudantes já sabem e poderemos ir instigando-os a ir mais fundo em seus saberes e assim

fazer com que atinjam o objetivo geral da aula, que é identificar valores de probabilidades em situações-problemas

Essas serão as duas primeiras aulas, no final será solicitado aos estudantes buscarem mais conhecimento sobre o assunto, sobre como poderão resolver o problema proposto. A tarefa deles será buscar e trazer fontes e materiais que os ajudem na próxima aula para apresentar ao restante da turma.

As próximas duas aulas consistirão na apresentação dos grupos sobre o que pesquisaram para a resolução do problema e irão formular hipóteses mais concretas. Agora, nessas aulas, nós como tutores iremos de forma sutil fazer com que essa discussão consiga chegar nos objetivos específicos esperados, lembrando que não será apresentado para os estudantes quais objetivos são esperados nessas aulas e não serão dadas respostas prontas, mas serão estimulados a chegarem nesses objetivos sozinhos.

Ao final das discussões, os estudantes começarão a montar formas para descobrir qual a probabilidade dos amigos a ganharem. É importante mostrar a eles que não existe apenas uma forma de solucionar o problema e que eles podem resolver da forma que acharem mais coerente com todas as discussões que tiveram com os grupos, isso será realizado em primeiro momento nos grupos e depois de cada grupo ter entrado em consenso sobre uma solução, irão apresentar para os grupos e o tutor irá marcar tudo na lousa, para que no final, com todas as soluções propostas, eles cheguem na resolução do problema, desvendando quais serão os amigos com mais possibilidades de ganhar a aposta.

Após a resolução do problema proposto, nós iremos dar o feedback para cada grupo, colocando os pontos positivos e negativos, dizendo o que eles poderiam ter explorado mais. Nesse ponto, é importante falar sobre o desenvolvimento individual de cada integrante, jamais o comparando com outro colega, mas sim com ele mesmo no decorrer das aulas, mostrando o que ele pode melhorar e o que explorou de forma correta.

Figura 7 - Modelo de Avaliação do Aluno

[illegible]

Figura 8 - Habilidades e Competências a serem avaliadas

1. ABERTURA DISCUSSÃO DO PROBLEMA ESPERA-SE QUE O ESTUDANTE	2. FECHAMENTO RESOLUÇÃO DO PROBLEMA ESPERA-SE QUE O ESTUDANTE:
1.1. Identifique, explore e busque correlacionar os dados dos problemas	2.1. Demonstre estudo condizente com os objetivos propostos
1.2. Formule e explique hipóteses correlacionados ao problema	2.2. Exponha o conhecimento de forma sintética e didática
1.3. Participe e colabore com o grupo de forma adequada	2.3. Complemente, esclareça dúvidas, corrija informações trazidas pelos pares de forma construtiva

Revista Matemática e Educação, (1) (11): 36-61, 2021

4.2 Aplicando a aprendizagem entre pares ou times

A aprendizagem entre pares ou times, conforme já apresentamos, como o próprio nome revela, se trata da formação de equipes dentro de determinada turma para que o aprendizado seja feito em conjunto e haja compartilhamento de ideias.

Seja em estudos de caso ou projetos, os alunos tendem a resolver desafios e trabalhar juntos, o que é muito útil para encontrar conhecimento. Afinal, com a ajuda mútua, é possível aprender e ensinar ao mesmo tempo, formando um pensamento crítico, que se firma por meio de discussões sólidas e levando em consideração diferenças de opinião.

Para utilizar esse modelo de aprendizagem, pensamos na criação de projetos e/ou criação de jogos na Plataforma ‘Scratch’, para utilização de conceitos como o plano cartesiano e as coordenadas geométricas para alunos do 2º ano do Ensino Médio. Segue abaixo, o plano de aula preparado para o ensino de Plano cartesiano usando a aprendizagem baseada entre pares e time.

Quadro 2 - Plano de Aula: Plano Cartesiano

Turma: 7º A / MANHÃ
Tema: CARACTERÍSTICAS DO PLANO CARTESIANO, LOCALIZAÇÃO DE COORDENADAS NOS QUADRANTES DO PLANO CARTESIANO UTILIZANDO RECURSOS TECNOLÓGICOS.
Objetivos: • Introduzir os estudantes no campo de conhecimento da tecnologia, aplicando conceitos básicos de informática para criação de um projeto em pequenos grupos utilizando os conceitos de plano cartesiano e coordenadas geográficas.
Duração: 2 AULAS DUPLAS (4 AULAS)

Competências e Habilidades: (EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro. (EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
Recursos didáticos: • Conhecimentos básicos no Scratch. • Computador com conexão com internet • Material pesquisado previamente pelos alunos para realização do projeto.
Referências: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versao_fiver_site.pdf

Fonte: Elaborado pelas autoras

Inicialmente, será explicado ao aluno como irá ocorrer as próximas aulas, a nossa intenção é levar o aluno a explorar os conhecimentos que já adquiriu ao longo dos anos. Nosso papel como professor é sempre incentivar os estudantes, para que possam chegar às aulas mais confiantes em relação ao tema proposto.

Logo em seguida, os alunos serão separados em pares ou grupos de até três pessoas, para as orientações que deverão ser seguidas para a criação dos projetos na Plataforma Scratch e para refletirem sobre as primeiras ideias do projeto do grupo.

Assim, serão dadas as seguintes orientações para que os mesmos, através de seus conhecimentos prévios e pesquisas, consigam criar seus projetos:

O PROJETO:

- **Todos os projetos são de concepção livre (aberta) de acordo com as ideias de cada grupo.**
- **O grupo deverá criar um jogo na plataforma que utilize o sistema de posicionamento e movimentação no Scratch.**
- **Utilizar os comandos de direção para movimentação do “ator”.**

Figura 9 – Software Scratch



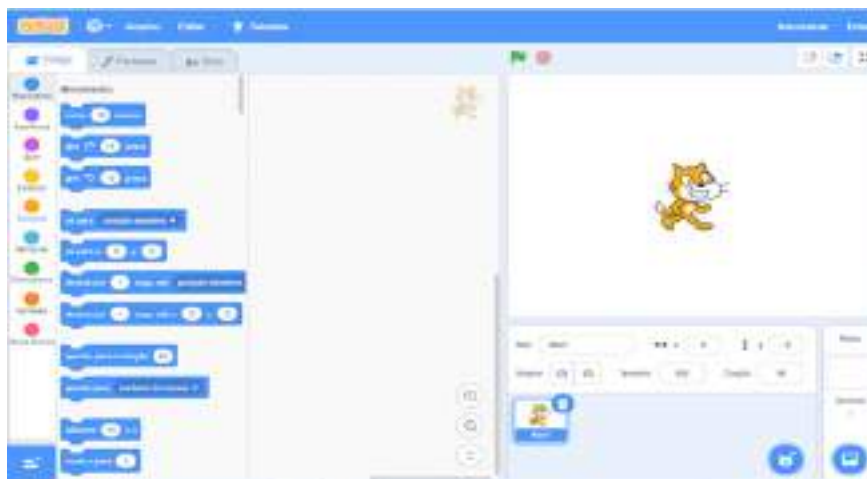
Fonte:SCRATCH, 2021

Para dar início aos projetos, o ideal é ensinar e relembrar os principais conceitos do Scratch, assim como mostrar alguns exemplos de criações, para que os alunos se inspirem e desenvolvam seus planejamentos. Além disso, é importante explorar como funciona o sistema de movimentação dos personagens na tela, pois essa é a ferramenta comumente utilizada no programa e ferramentas como as de controle, que são sempre muito usadas.

Após a apresentação da plataforma, é preciso reservar alguns minutos da aula para fazer os alunos de fato refletirem sobre o projeto. Apesar de orientá-los em vários momentos de aulas anteriores a pensarem no projeto, sugira que cada um pegue uma

folha de papel e respondam às seguintes perguntas: **Até agora, qual foi o projeto Scratch que mais despertou meu interesse? Consegue pensar em três ideias para algo em que possa trabalhar? E quais são essas ideias?**

Figura 10 - Interface do software Scratch



Fonte: Produzida pelas autoras

Assim, nas próximas aulas, partirão para o desenvolvimento de suas ideias e projetos, os alunos serão levados à sala de informática para a utilização dos computadores e para terem acesso à plataforma. Agora, nessas próximas aulas, nós como tutores iremos auxiliar de forma sutil, para fazer com que os alunos criem bons projetos e utilizem os conceitos de plano cartesiano e as coordenadas geométricas, sempre os estimulando para chegarem aos objetivos e aprenderem a cada vez mais com o grupo e suas experiências.

No término da criação, os grupos devem apresentar à turma suas criações e explicá-la. Desta forma, cada grupo receberá o feedback colocando pontos positivos e negativos, dizendo o que poderia ter explorado mais na plataforma. Neste ponto é importante falar sobre o desenvolvimento individual e da equipe como um todo.

Sempre apontando as qualidades e fazendo críticas construtivas, para que os alunos possam crescer no aprendizado das aulas.

Na avaliação do aluno, a melhor forma é pedir que cada um faça uma autoavaliação de desenvolvimento e participação no projeto. Logo em seguida, pedir que cada componente do grupo também faça uma avaliação construtiva de seu colega de trabalho. Assim, os alunos aprendem a oferecer e receber comentários construtivos que aprimoram seus aprendizados em equipe.

5 Considerações finais

A matemática infelizmente é considerada, há anos, como uma matéria complexa e rígida, por conta de alguns professores ainda usarem a metodologia tradicional para aplicar seus conteúdos. E por esse motivo, é indispensável transformar a matemática em algo aprazível, fazer com que o aluno tenha confiança na sua capacidade, entenda que tudo a sua volta envolve a matemática aprendendo não por obrigação, mas de forma prazerosa. A metodologia ativa é isso, colocar o estudante como protagonista do seu aprendizado, fazer com que ele tenha autonomia, se torne um ser crítico, que não ande pelos caminhos de um autor ou professor, mas que forme suas próprias trilhas através da sua busca pelo conhecimento.

Os métodos de ensino devem seguir esse objetivo de levar ao aluno uma educação mais prazerosa, para que os alunos se motivem e se envolvam com entusiasmo em todas as atividades com níveis de dificuldades diferentes. Hoje em dia, se tornou mais proeminente uma educação transformadora, temos jovens que são nativos digitais, que estão sempre em contato com muito mais tecnologia e informação. Então, educar os alunos de maneira positiva e criativa permitirá que eles atinjam o ápice do aprendizado.

Desta forma, neste artigo foram apresentados conteúdos matemáticos utilizando a metodologia ativa, ficando evidente que

não é necessário complexidade para aplicação desta metodologia no ensino da matemática. Além disso, é possível ver a importância de envolver os alunos, principalmente por meio de incentivos e desafios. Ademais, o impacto da aprendizagem não é pelas experiências do professor, e sim por sua própria vivência.

Pode-se refletir então, que realizar uma prática pedagógica baseada em metodologias ativas no ensino de um conteúdo transforma a qualidade e a eficácia do aprendizado. As estratégias de ensino-aprendizagem da metodologia ativa são facilitadoras de uma aprendizagem significativa, desenvolvendo entre os alunos a capacidade de realizar sua própria aprendizagem de forma independente. O fato dos alunos se tornarem participantes do processo de aprendizagem mostra que se aprende muito a partir da realidade.

Sabendo de todo esse benefício que a metodologia ativa traz para o aluno, temos o intuito de tornar esse artigo um trabalho para ser aplicado em sala de aula de uma escola estadual, considerando os modelos de aulas propostos. Assim, poder perceber na prática a qualidade e eficácia da metodologia que coloca o estudante no centro do processo de aprendizagem.

Referências

APRENDER por projetos com a biblioteca escolar. Disponível em: <https://www.slideshare.net/Seripe/aprender-por-projetos-com-a-biblioteca-escolar> (slide 3). Acesso em 24 abr. 2021.

ABREU, José Ricardo Pinto de. Contexto Atual do Ensino Médio: Metodologias Tradicionais e Ativas - Necessidades Pedagógicas dos Professores e da Estrutura das Escolas. 2011. 105 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ciências da Saúde) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2009.

ALVES, Rubem. A alegria de ensinar. Campinas: São Paulo. Papirus, 2012.

ALVES, Rubem. Ao professor, com o meu carinho. Campinas: São Paulo. Versus Editora, 2004.

AULA INVERTIDA. Disponível em <https://sites.google.com/a/ctmsenai.com.br/googleeducator/recursos/aula-invertida>. Acesso em 24 abr. 2021.

BARROS, A. J. P.; LEHFELD N. A. S. Fundamentos de metodologia: um guia para iniciação científica. São Paulo: McGraw-Hill, 1986.

CARVALHO, Anabela. Pedagogia, Didactica e metodologia. Disponível em: <https://ciberduvidas.iscte-iul.pt/consultorio/perguntas/pedagogia-didactica-e-metodologia/25023/>. Acesso em 18 de mar. de 2021.

COMENIUS, Juam A. Didactica Magna. Editora Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

FILATRO, Andrea; CAVALCANTE, Carolina Costa. Metodologias Inov-ativas na educação presencial, a distância e corporativa. São Paulo: Saraiva Educação, 2018.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa. 51. ed. Rio de Janeiro: Paz e terra, 2015.

MORAIS, Cleyson Mello de; PENTAGNA, Regina Petrillo; ALMEIDA, Rogério Neto de. Metodologias ativas: desafios contemporâneos e aprendizagem transformadora. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 2019.

MORAN, José; BACICH, Lilian. Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

OLIVEIRA, Bruno Luciano Carneiro Alves de et al. Team-Based Learning como Forma de Aprendizagem Colaborativa e Sala de Aula Invertida com Centralidade nos Estudantes no Processo Ensino-Aprendizagem. Revista Brasileira de Educação Médica [online]. 2018, v. 42, n. 4. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1981-52712015v42n4RB20180050>>. Acesso em 24 abr. 2021.

PIAGET, Jean. Para onde vai a educação? Rio de Janeiro: José Olympio, 1977.

SILVA, João Batista da. SALES, Gilvandenys Leite e Castro. BRAGA, Juscileide. Gamificação como estratégia de aprendizagem ativa no ensino de Física. Revista Brasileira de Ensino de Física [online]. 2019, v. 41, n. 4. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0309>>. Epub 18 Abr. 2019. ISSN 1806-9126. <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0309>. Acesso em 24 abr. 2021.

SMOLE, K.S. Escola para crianças de 4 a 6 anos. Brasília: Cisbrasil,

2008.

SCRACH. Disponível em: <https://scratch.mit.edu/>. Acesso em 24 abr. 2021.

VIEIRA, Marta; PANÚNCIO-PINTO, Maria. A Metodologia da Problematização (MP) como estratégia de integração ensino-serviço em cursos de graduação na área da saúde. Medicina (Ribeirão Preto. Online), 2015. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/rmrp/article/view/104310/102957>. Acesso em 24 abr. 2021.

WESTBROOK, Robert B., TEIXEIRA, Anísio. John Dewey. Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010. (Coleção educadores).

MATEMÁTICA AtivaMente: um estímulo ao raciocínio lógico

Heloisa Helena Perissin Costa
Licenciada em Matemática Uni-FACEF

Joel Tavares da Silva
Licenciado em Matemática Uni-FACEF

Letícia Signolfi Barbosa
Licenciada em Matemática Uni-FACEF

Lucinda Maria de F. R. Coelho
Doutora em Ciências e Docente do Uni-FACEF
lucindarcoelho@gmail.com

1 Introdução

Os professores da Educação de Jovens e Adultos-EJA, devido ao curto tempo dessa modalidade de ensino, normalmente se prendem ao ensino tradicional e dificilmente conseguem ministrar todo o conteúdo presente na grade curricular. Surge daí a grande dificuldade da maioria dos docentes da área, um currículo extenso a ser cumprido e pouco tempo para as aulas. Diante disso, propôs-se para esse trabalho atividades lúdicas como estratégia de ensino, visando estimular o processo cognitivo, o raciocínio lógico e interesse pela matemática, desmistificando assim, o que muitos tem preestabelecido, que a matemática é difícil de ser aprendida.

Segundo Lehr (1999, p. 8) “não é somente importante acrescentar anos à vida, mas também acrescentar vida aos anos”. O desenvolvimento do raciocínio lógico e os processos cognitivos fazem parte do processo de ensino aprendizagem, defende-se seus benefícios recorrendo a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel e descreve-se também o embasamento teórico utilizado para realização deste trabalho.

Os processos cognitivos tem ligação direta com o processo

de ensino aprendizagem, Moreira e Masini (2011) afirmam que:

“Cognição é o processo no qual o mundo de significados tem origem. À medida que o ser se situa no mundo, estabelece relações de significação, isto é, atribui significados a realidade em que se encontra. Esses significados não são entidades estáticas, mas pontos de partida para atribuição de outros significados. Tem origem então, a estrutura cognitiva (os primeiros significados), constituindo-se nos “pontos básicos de ancoragem” dos quais derivam outros significados (MOREIRA e MASINI, 2011, p.13).

Para explorar os pontos básicos de ancoragem dos quais derivam outros significados, recorre-se a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, que defende a importância dos conhecimentos prévios dos alunos, chamados também de “subsunçores”. Acredita-se, portanto, que quando se estimula o raciocínio lógico por meio de atividades lúdicas e que traz significados à vida real, o aluno relaciona esse novo conteúdo ao que ele já tem armazenado, seja da origem que for transmitido pela família, aprendido no meio social, na escola ou no trabalho, e, então, é capaz de, gerando significado, visualizar a aplicação do conteúdo no cotidiano, é quando ocorre a aprendizagem significativa.

Ressalta-se aqui, o objetivo desse trabalho que é propiciar aos alunos da EJA, um espaço educativo diferenciado, que valorize suas experiências e seus saberes, pois se sabe o quanto é importante para esse público o processo de conhecimento que os aprova, como defende Shotter:

Todo processo de construção de conhecimento, marcadamente o do adulto, aluno da EJA, é permeado por suas vivências, cuja lembrança é mobilizada em determinados momentos das interações de ensino-aprendizagem escolar, não porque se refiram a fatos de interesse exclusivamente pessoal, mas porque são justamente lembranças que se encaixam no marco

aportado por nossas instituições sociais – aquelas em que temos sido socializados – caso contrário, não se recordariam (SHOTTER, 1990, p. 148).

Por isso, buscou-se no primeiro dia de contato com os discentes, por meio de diálogos e do questionário, adentrar a história de cada um, perguntando sobre a profissão e o que os motivou a voltarem a estudar.

O método de ensino atividades lúdicas é baseado em autores como Sneyders (1996), Libâneo (1990), Kishimoto (2000) entre outros que defendem o uso dessas atividades, bem como jogos como uma forma eficaz de se ensinar.

A palavra lúdico é de origem latina “ludus” e significa “jogo”. Porém, o seu significado não fica restrito apenas a essa atividade, ele é bem mais amplo, remete-se a jogos, brinquedos e divertimentos.

Atividades lúdicas como método de ensino são de primordial importância, pois como diz Sneyders (1996, p.36) “educar é ir em direção à alegria”, e através do lúdico se aprende com muito mais motivação e prazer. Muitas vezes, essa forma de ensinar é criticada por ter conhecimento superficial, mas como afirma Almeida (1998, p.13):

A educação lúdica está distante da concepção ingênua de passatempo, brincadeira vulgar, diversão superficial. Ela é uma ação inerente na criança, no adolescente, no jovem e no adulto e aparece sempre como uma forma transacional em direção a algum conhecimento, que se redefine na elaboração constante do pensamento individual em permutações com o pensamento coletivo.

Definir a palavra jogo não é tão simples, pois a mesma varia dependendo da forma de seu contexto, podendo se referir a diversas formas e tipos, como jogos políticos, xadrez, amarelinha, adivinhas, entre outros (KISHIMOTO, 2001).

Segundo Libânio (1998), desenvolvimento do ensino matemático escolar, em seu contexto histórico toma formas diferenciadas dependendo da concepção pedagógica de cada docente, pois quando se propõe um jogo, deve-se ter em mente qual é o objetivo específico a alcançar. Definir o objetivo é importante, pois por meio dele além do aprendizado pode desenvolver novas maneiras e atitudes, respeitar regras e o outro, não só como um adversário, mas como uma forma de trabalhar em equipe, e assim melhorar o comportamento social, aprender saber ganhar e perder.

Como menciona Borin (1996, p.9), o jogo retira o aluno da passividade e gera atitudes positivas frente ao conteúdo matemático estudado;

Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem. (BORIN, 1996, p.9)

O jogo pode ser utilizado para introduzir o assunto estudado, como forma de aprofundamento ou conclusão. De acordo com os parâmetros nacionais curriculares:

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações se sucedem rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (PCN do Ensino Fundamental - MEC, 1998, p.46)

Devido a todos esses fatos, define-se que essa seria a metodologia usada para a aplicação das oficinas de matemática deste trabalho, atividades lúdicas e jogos. Mas como saber se o método escolhido é eficaz? Segundo Tahan (1968) é necessário que o jogo, para atingir o objetivo desejado, seja conduzido pelo professor. Ou seja, é papel do educador auxiliar o aluno no processo de desenvolvimento do jogo, ser o facilitador, mediante as dúvidas que forem surgindo, porém não se pode traçar o caminho no lugar do discente, mas sim indicá-los.

Paulo Freire (2001, p.52) nos diz:

“Que ensinar não é transferir conhecimentos, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção”. O docente, além de ser facilitador também tem a missão de tornar a atividade instigante e motivar os alunos, certo que o meio sempre influencia o aprendizado será maior a aprendizagem com a motivação do professor.

2 Aplicação de atividades lúdicas

As atividades foram aplicadas na turma do 3º ano do Ensino Médio, no período noturno, composta por 23 alunos com faixa etária de 19 a 62 anos. As ocupações variam entre autônomos outros funcionários registrados como manicure, jardineiro, estudante, padeiro, designer de sobrancelha, Uber, coladeira, mecânico, cozinheira, sapateiro, operador de máquina, dona de casa, curtumeira, balconista, pedreiro, serviços gerais e revisora.

No primeiro dia, iniciou com a apresentação dos estudantes do Curso de Matemática a discorrerem sobre as atividades que seriam realizadas nos três dias e qual a finalidade destas. Foi solicitado a cada aluno que se apresentasse dizendo qual o motivo que o levava a voltar a estudar, o que se modificou em sua vida pessoal e profissional e sua pretensão ou não de continuar os estudos.

Em seguida, foram aplicadas as atividades do dado mágico, soma mágica e o quadrado mágico, que têm o objetivo de estimular os processos cognitivos, raciocínio lógico, habilidade com os números, o cálculo mental e o convívio social dos alunos, além de desenvolver a percepção, atenção e memória dos mesmos.

No segundo dia, aplicou-se os seguintes truques de adivinhação e quebra-cabeça: mágica com moedas, fósforos e a torre de Hanói, que ajudam a desenvolver o aspecto cognitivo, socialização, percepção, raciocínio lógico, plano de ação, estratégias e desenvolvimento na resolução de problemas.

Por fim, no terceiro dia para encerrar as atividades, os alunos da EJA (Educação de Jovens e Adultos) participaram da Oficina de Escher no Laboratório de Matemática no Centro Universitário Municipal de Franca para trabalhar com isometrias em relação à rotação, translação e reflexão deslizante das figuras desenvolvida pelo professor de Matemática Aleff Jouni Ribeiro formado no Uni-FACEF, para apresentar e auxiliar nas técnicas a serem desenvolvidas. Foi muito interessante convidar os alunos para ter contato com o ambiente universitário, propiciando-lhes conhecer a estrutura interna da faculdade, professores e alunos.

As atividades desenvolvidas são descritas nas próximas seções.

2.1 Atividade: dados mágicos

“O jogo consiste em descobrir a soma das faces ocultas de quatro dados que estão empilhados um sobre o outro”

Aplicação

Para desvendar a mágica usa-se n dados de maneira que forme uma pilha com todos os n dados, um sobre o outro, onde se pode observar a face somente do primeiro dado por estar na parte

superior.

Obs: Com o número de dados e o valor da face superior é possível adivinhar a soma das faces ocultas.

Iniciou a apresentação do jogo realizando uma adivinhação, em seguida colocou na carteira de um aluno para que colocasse os dados um sobre o outro da maneira como quisesse fazendo uma ***pilha*** com quatro dados, um sobre o outro, onde se pode observar a face somente do primeiro dado por estar exposto na parte superior. O número visualizado foi o ***cinco***, com esse número já é possível saber a soma das faces ocultas, foi dado alguns minutos para o aluno pensar e dar a resposta. Resposta correta=23

Figura 1 - Aplicação de dados mágicos.



Fonte: Autoria própria

Dica: A soma das duas faces opostas de um dado é sempre “sete”, portanto bastava apenas multiplicar 7×4 e subtrair o valor da face superior $\rightarrow 7 \times 4 - 5 = 23$, ao realizar com outros alunos a atividade por ter se tornado um desafio entre os alunos descobrir “a mágica da soma dos números dos dados”, isto é, generalizar $\rightarrow 7 \times$ ***número de dados – valor da face exposta***

2.2 Atividade: Soma mágica

A soma mágica é uma atividade matemática, como um desafio ou uma atividade extra, propõe desenvolver o raciocínio lógico e matemático, pode ser realizada com quantos números quiser, quanto maior a quantidade de números, maior a soma. Tem o objetivo de estimular os processos cognitivos dos alunos, raciocínio lógico, habilidade com os números e a interação social, pois através dessa mágica trabalha-se com os alunos a percepção, atenção e memória.

Passo-a-passo

Convide três alunos A, B, C

Passo 1: Peça para o aluno A escrever na lousa, um número qualquer com uma quantidade de dígitos definidas, esse número não pode terminar em 0 (zero) ou 1 (um).

Passo 2: Anota-se em um papel o **resultado** da soma, dobra-se o mesmo e entregue ao aluno A para guardar até o término da soma para conferir o resultado.

Passo 3: Em seguida peça para o aluno B escrever outro número qualquer com a mesma quantidade de dígitos.

Passo 4: Você escreve outro número sempre com a mesma quantidade de dígitos

Passo 5: Em seguida peça para o aluno C escrever outro número qualquer com a mesma quantidade de dígitos.

Passo 6: Repita o Passo 4

Passo 7: Peça para qualquer aluno realizar a soma.

Passo 8: Ao término da soma solicitar para aluno A mostrar o número secreto escrito no papel que coincidirá com o resultado da soma. É um truque de mágica!

Dica: Para encontrar o resultado da soma mentalmente, **subtraia**

duas unidades do último algarismo do primeiro número escrito na lousa pelo aluno A e acrescenta o número 2 no início do número.

Aplicação

Escolheu-se três alunos e pediu para cada um falar um número qualquer de 1 a 9, escreveu na lousa a sequência que foi falado. E em seguida o resultado em uma folha e entregou para o professor guardar até o término da soma, anotou-se a segunda sequência de números falada pelos alunos, escreveu a terceira sequência de números e pediu para falar aleatoriamente a quarta sequência de números, para encerrar escreveu a quinta sequência de números e realizou-se a soma, ao terminar de somar foi pedido para o professor abrir o papel e conferir o resultado, os alunos aguardavam ansiosos e verificaram que o resultado anotado no papel era igual ao resultado da lousa.

Exemplo: Seja o número 5486 → subtraindo 2 = 5484 → acrescentando 2 no início do número → número secreto **25484**

Nos Passos 4 e 6 você preencherá com algarismos complementares com o número anterior, isto é, seja sempre 9.

Exemplo:

Aluno A → 5486

Aluno B → 3524

Você → 6475

Aluno C → 1038

Você → 8961

Soma → 25484 É um truque de mágica!!!

Observações:

- I. Pode-se variar o número de dígitos com os mesmos passos.
- II. Quais são as mudanças na estratégia se variarmos o número de parcelas

2.3 Atividade: quadrado mágico

Segundo Medeiros (2013) não se sabe ao certo, mas há registros do uso do quadrado mágico em épocas muito antigas na China e na Índia. O primeiro registro do quadrado de 9 casas (3x3), que é o mais conhecido, foi visto em um manuscrito Árabe, no fim do século VIII e atribuído a Apolônio de Tiana por Marcellin Berthelot. Durante a idade Média, os quadrados mágicos se tornaram muito populares pelo seu uso em talismãs e pantáculos (pantáculos são todos os símbolos que possuem um significado de natureza mágica ou esotérica, a palavra pantáculo, de origem grega, é composta por pan-, que significa "tudo", e-kleo, que significa "honra", ou mesmo, "renome"). Os talismãs eram associados a Planetas que atribuíam a eles o poder de atrair proteção astral.

Objetivo do “quadrado mágico”

Este jogo tem o objetivo de contribuir no processo de ensino aprendizagem, com o desenvolvimento de tarefas investigativas realizadas com o quadrado mágico aditivo relacionando-o com progressão aritmética (PA). Desde os termos centrais a constantes mágicas, ou seja, houve um estudo teórico na evolução histórica dos quadrados mágicos, com noções geométricas, sequências numéricas, termos gerais de PA e a soma de seus termos.

O jogo quadrado mágico pode ser uma atividade tanto de investigação para o desenvolvimento do raciocínio lógico, como também uma forma instigante e desafiadora de solução de problemas propostos que irão fazer o educando se envolver tentando superar

as dificuldades existentes. Favorece a construção do conhecimento matemático de maneira divertida, natural e espontânea, agindo como elemento motivador para aprender matemática.

Definição e classificação

O quadrado mágico é um tipo de tabela quadrada de números em progressão aritmética, onde a soma de suas linhas, colunas e as diagonais devem ser uma constante sempre igual. Existem outros tipos de quadrado mágico, onde cada um tem suas particularidades e recebem algumas classificações como quadrado imperfeito ou defeituoso, quadrado hipermágico e quadrado diabólico.

Características de cada um:

- O quadrado imperfeito ou defeituoso é aquele que não segue todas as regras de um quadrado mágico. Por exemplo: as somas das linhas não são iguais às somas das colunas e diagonais.
- O quadrado hipermágico é aquele que além de obedecer a regras básicas de um quadrado mágico, possui algumas propriedades adicionais. Por exemplo: um quadrado mágico, onde trocando suas colunas de lugar, outro assim será formado.
- O quadrado diabólico é aquele quadrado hipermágico que possui muitas propriedades a mais ou propriedades bem mais complexas. Esse nome surgiu devido à complexidade e dificuldade em se formar um desse.

Solucionando quadrados mágicos

Os quadrados mágicos constituem uma excelente ferramenta de aprendizagem e desenvolvimento do raciocínio

lógico, contribuindo na formação do senso de organização numérica em relação à utilização de operações matemáticas na busca por resultados pré-determinados. O interessante na realização desse modelo de jogo matemático consiste na disposição correta dos números de acordo com o quadrado fornecido.

Por exemplo, ao utilizar um quadrado de ordem 3×3 , tem ao todo 9 células a serem preenchidas com os algarismos de 1 a 9, sem repetição. A soma dos números em todas as horizontais, verticais e diagonais devem ser iguais a 15. No quadrado 4×4 , tem 16 células que deverão ser preenchidas com os números de 1 a 16, também sem repetição. No quadrado 4×4 a soma dos números na horizontal, vertical e diagonal deve totalizar 34.

Na busca do posicionamento adequado, respeitando a soma exigida, os alunos devem descobrir com a interferência ou não do professor, uma importante relação entre os números, denominada paridade. Essa relação entre os números é responsável pela seguinte situação:

- A soma entre números pares possui como resultado um número par.
- A soma entre algarismos ímpares resulta em um número par.
- A soma entre um número par e um número ímpar resulta em um número ímpar.

Com base na paridade dos números, a resolução de um quadrado mágico se torna menos complexa, e os números poderão ser reorganizados de acordo as definições fornecidas.

2.3.1 Quadrado mágico de ordem 3×3

Na resolução do quadrado 3×3 , sempre somar três números buscando como resultado o número 15, classificado como

ímpar. Portanto, a adição de termos se realizará mediante presença de pelo menos um número ímpar. Os números pares e ímpares envolvendo o quadrado 3 x 3 são:

Pares: 2, 4, 6, 8.

Ímpares: 1, 3, 5, 7, 9.

Figura 2 - Quadrado mágico 3x3.

15	15	15	15	15
15	2	9	4	15
15	7	5	3	15
15	6	1	8	15
15	15	15	15	15

Fonte: Autoria própria

Observe que em apenas uma sequência os números são todos ímpares e no restante tem dois números pares e um ímpar. Analise a situação envolvendo como ponto de explicação a relação de paridade dos números, isto é:

Par + Ímpar + Par = Ímpar

$2 + 9 + 4 = 15$ $6 + 1 + 8 = 15$ $2 + 7 + 6 = 15$ $4 + 3 + 8 = 15$

Ímpar + Ímpar + Ímpar = Ímpar

$9 + 5 + 1 = 15$

2.3. Quadrado mágico de origem 4x4

Na resolução do quadrado mágico de ordem 4 x 4, uma possível disposição entre os números será:

Figura 3 - Quadrado mágico de ordem 4 x 4

34	34	34	34	34	34
34	1	14	15	4	34
34	12	7	6	9	34
34	8	11	10	5	34
34	13	2	3	16	34
34	34	34	34	34	34

Fonte: Autoria própria

Observe que a soma envolveu dois números pares e dois números ímpares.

Par + Par = Par e Ímpar + Ímpar = Par, então:

Ímpar + Ímpar + Par + Par → Par + Par → Par

No primeiro quadrado mágico de ordem 3 x 3 identifica que nos termos de 1 a 9 ou seja (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) existe uma constante positiva entre eles, onde para reconhecer ter que subtrair do segundo para o primeiro do terceiro para o segundo e assim sucessivamente ou seja: $2 - 1 = 1$ ou $3 - 2 = 1$ ou $4 - 3 = 1$ e assim pode observar que existe uma constante positiva, onde 1 é maior que 0.

Aplicação

Ao entregar para cada aluno um quadrado mágico de 3 x 3 impressos para preencher com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, escritos na lousa, de maneira que não poderia repetir os números em nenhum dos quadrados e que a soma das linhas, colunas e diagonais resultaria em 15. Foram dados alguns minutos para os alunos tentarem resolver o desafio, dos alunos dois conseguiram

montar a resolução do quadrado mágico, tiveram alunos que conseguiram completar somente as linhas e outros alunos permaneceram tentando. Ao termino do tempo dado, começou a dar dicas para resolução do quadrado mágico, relacionar com Progressão Aritmética PA. Foi explicado como calcular média aritmética de uma sequência numérica, exemplo: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 para calcular a média aritmética desses nove termos deve somar um com o outro $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ e dividir pelo número de termos $45/9 = 5$ feito isso, explicou sobre termos equidistantes onde pode estabelecer o termo central do quadrado mágico e a sequência numérica de cada linha, coluna e diagonal irá ter. Observaram que se somar os extremos e dividir por dois também encontravam a média aritmética que é 5, o termo central do quadrado mágico. Se somar $2 + 8 = 10/2 = 5$ e $3 + 7 = 10/2 = 5$; $4 + 6 = 10/2 = 5$, verificou-se que os números somados são 15. 31

Figura 4 - Aplicação de quadrado mágico.



Fonte: Autoria própria

2.4 Atividade: Mágica com moedas

Tem-se 5 moedas dispostas sob a mesa, sendo a configuração delas três coroas e duas caras. O que acontece se alterar a configuração de uma delas? Ao virar qualquer uma das moedas, nota-se que com apenas este movimento muda o que era par para ímpar e o que era ímpar para par, por exemplo, se virar uma coroa que inicialmente era um número ímpar 3, passa então a ter 3 caras que a princípio eram 2 e fica com 2 coroas.

Estrutura

Para realizar essa mágica a pessoa que irá conduzir, será chamada de professor. Com 5 moedas de 0,25 centavos e os alunos para virar as moedas.

A mágica

Após o professor ter olhado a configuração inicial das moedas e gravado na memória que são 3 coroas e 2 caras vira-se de costas para a mesa com as moedas e os alunos, em seguida pede para que eles movimentem as moedas 6 vezes. Observação: Veja que após 6 movimentos as moedas voltarão a ter a mesma estrutura inicial, número de caras par e coroas ímpar. Ao terminarem os 6 movimentos o docente pede para que coloquem a mão em cima de uma moeda, ao tampar a moeda escolhida adivinhará a face escondida, nesse momento o professor vira de frente para os discentes e observa as moedas, como deve haver um número ímpar de coroas e um número par de caras, se houver uma cara e três coroas saberá que a face escondida é uma cara, ou se houver 4 caras (número par) saberá que a moeda escondida tem face coroa pois coroa tem que ser ímpar (1).

Aplicação

Após organizar as carteiras em formato de U, em seguida dividiu-se em três grupos de três alunos e um grupo com cinco alunos e entregou a cada grupo cinco moedas de 0,25 centavos, em seguida explicou as regras do jogo de adivinhação, cada grupo teria uma pessoa para virar as moedas e escolher uma para tampar e as demais para adivinhar o resultado. Cada estudante ficou responsável por certo grupo de alunos, com cinco moedas cada participante tinha o direito de realizar seis movimentos, entre cara e coroa. Os alunos no início ficaram com um pouco de receio se a adivinhação daria certo e nas duas primeiras jogadas cada estudante responsável pelo grupo adivinhou a moeda escondida. A partir da terceira rodada um integrante do grupo realizou os movimentos e escondeu a moeda e outro integrante desvendou cara ou coroa fora, alternava a ordem dos integrantes em cada jogada.

2.5 Atividade: Quebra-cabeça com palitos de fósforos

Esse é um truque matemático que instiga o raciocínio lógico e é bastante usado para esse fim, por necessitar de pouco recurso, apenas uma caixa de fósforos, muito cuidado ao realizar esta atividade com crianças. Algumas contribuições que essa brincadeira com palitos pode gerar:

- Estimular a criatividade;
- Aprimorar a concentração e atenção;
- Consolidar a organização visual e fortalecer a noção de espaço;
- Comparar com facilidade as figuras geométricas como quadrado e triângulos.

Mova 2 palitos e forme 4 triângulos

Para esse truque precisa-se de 10 palitos de fósforos, dispostos sob a mesa da seguinte forma:

Figura 5 - Mova 2 palitos e forme 4 triângulos



Fonte: MATEMATICAZUP, 2015.

Solução: Retiram-se dois palitos que estão nas bordas à direita e os colocam no centro dos dois quadrados e então terá a solução final como na imagem a seguir:

Figura 6 - Mova 2 palitos e forme 4 triângulos.



Fonte: MATEMATICAZUP, 20145.

Mova 3 palitos e forme 3 quadrados

Para executar esse desafio são necessários doze palitos de fósforos dispostos sob a mesa, formando quatro quadrados como na imagem a seguir:

Figura 7 - Mova 2 palitos e forme 4 triângulos.



Fonte: MATEMATICAZUP, 2015.

Solução: Retirar os dois palitos da borda superior à esquerda e o palito que fica embaixo do lado direito e os encaixar do lado direito na parte inferior.

Figura 8 - Mova 2 palitos e forme 4 triângulos.



Fonte: MATEMATICAZUP, 2015.

b. Mova 2 palitos e forme 7 quadrados.

Para esse truque é preciso de doze palitos colocados sob a mesa formando quatro quadrados pequenos como a seguir:

Figura 9 - Mova 2 palitos e forme 7 quadrados.



Fonte: MATEMATICAZUP, 2015.

Solução: Retiram-se dois palitos do lado superior à direita e os coloca dentro do quadradinho a esquerda no formato de cruz, obtendo-se 4 quadradinhos dentro de um quadrado maior, totalizando 5 e mais 2 quadrados na parte inferior.

Figura 10 - Mova 2 palitos e forme 7 quadrados.



Fonte: MATEMATICAZUP, 2015.

Aplicação

Para realizar a atividade com os fósforos foi entregue para cada participante 12 palitos de fósforo e escrito na lousa a posição inicial dos fósforos e o exercício que deveriam fazer para chegar ao resultado como, mover 02 palitos para formar 04 triângulos e mover 03 palitos para formar 03 quadrados.

Os alunos montaram as figuras com os fósforos conforme desenhado na lousa e para encontrar a solução foi dado alguns minutos. No primeiro exercício moveram vários palitos, em várias direções e observaram que era preciso dar algumas dicas para tentarem mover os palitos corretamente. Viram que o resultado era muito simples, uma questão de observar, raciocinar e atenção, e para o segundo exercício sugeriu mais alguns minutos.

Observou-se que alguns alunos já apresentavam destreza para realizar o movimento dos palitos. No terceiro exercício alguns alunos já solicitavam as dicas antes de começarem, para facilitar enxergar o movimento que deveria se fazer para encontrar a resposta.

2.6 Atividade: Torre de Hanoi

Conta a lenda da Torre de Hanói que no tempo de Benares, cidade Santa da Índia, sob a cúpula que marcava o centro do mundo, existia uma bandeja de bronze com três agulhas de diamantes, cada uma de um palmo de altura e da grossura do corpo de uma abelha. Durante a criação, Deus colocou 64 discos de ouro puro em uma das agulhas, o maior deles imediatamente acima da bandeja e os demais, cada vez menores, por cima. Esta torre foi chamada de Torre de Brahma. (Manoel).

Dia e noite os sacerdotes trocavam os discos de uma agulha para outra, de acordo com as leis imutáveis de Brahma. Essa lei dizia que o sacerdote do turno não poderia mover mais de

um disco por vez, e que nunca fosse menor que o de cima. Quando todos os 64 discos tivessem sido transferidos da agulha colocada por Deus no dia da Criação para outra agulha, o mundo deixaria de existir.

Dizem os sábios que o mundo foi criado há 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos na razão de 1 disco por segundo. (Manoel).

Estrutura

A torre de Hanói é um jogo em que sua estrutura consiste em uma base retangular ou circular sobre a qual estão três pinos, em um dos pinos são encaixados sete discos de diâmetros decrescentes a partir da base.

Figura 11 - Torre de Hanói.



Fonte: Autoria própria

Regras do jogo

- Só é possível movimentar uma peça de cada vez;
- A peça maior não pode ficar sobre a peça menor;
- As peças devem estar todas em um dos pinos, ou em movimento.

Objetivo do jogo

O jogo tem o objetivo de exercitar o raciocínio lógico e habilidades na resolução de problema, também é utilizado em sala de aula como estudo da Função exponencial.

Para encontrar o número mínimo de movimentos na transferência dos discos do primeiro pino para o terceiro pino utilizar a função $f(n) = 2^n - 1$, ao substituir o valor de n pelo número de discos tem a quantidade mínima de jogadas a ser realizada para transpor os discos de um pino de uma extremidade para a outra, também se observa o crescimento exponencial.

Tabela 1 - Número mínimo de jogadas a serem realizadas.

n - Número de discos	Quantidade mínima de jogadas
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
8	256
10	1.023
15	32.767
20	1.048.575
30	1.073.741.823
64	18.446.744.063.709.551. 615

Aplicação

Ao colocar no meio das carteiras em formato de U três carteiras juntas e em cima o tabuleiro da torre de Hanói com sete discos, escreve na lousa uma tabela com a fórmula exponencial $f(n) = 2^n - 1$ para que possam observar as informações: que conforme a quantidade de discos aumenta a quantidade de

movimentos necessários para transferir os discos de um pino para o outro extremo também aumenta.

Ao iniciar o jogo os movimentos foram realizados de maneira que os alunos observassem o manuseio dos discos, em seguida os alunos foram convidados a participarem da transferência dos discos e conforme o número de s discos aumentavam, o número de movimentos aumentava e a partir daí se tornou um desafio que exigia concentração na transferência dos discos.

Figura 12 - Tabuleiro da torre de Hanói.



Fonte: Autoria própria

2.7 Oficina: Isometrias: Desvendando escher

Trata-se de conhecer um pouco sobre a história do artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher, e proporcionar aos alunos do curso de Educação de Jovens e Adultos, uma oficina no Laboratório de Matemática ministrada pelo professor de Matemática Aleff Jouni Ribeiro, ex-aluno do Uni-FACEF, que apresentou essa oficina em seu trabalho de conclusão de curso.

Figura 13 - Professor Allef Jouni com autores do TCC no dia da aplicação da oficina de Escher.



Fonte: Autoria própria

Objetivos

Desenvolver nos alunos o “sentido espacial” por meio de atividades que enfatizam a visualização; resolver problemas envolvendo a visualização e compreensão de relações espaciais, distinguir as transformações de figuras congruentes que se relacionam por meio de reflexões, rotações, translações ou reflexões deslizantes.

Observar as transformações isométricas que ocorrem em gráficos de determinadas funções, desenvolver atividades que desvendem as transformações, utilizadas por Escher em seus últimos trabalhos.

Justificativa

Reconhecimento do espaço físico ao desenvolver a observação e a percepção de semelhanças, diferenças e regularidades. Conexão com outras áreas da Matemática e com outros campos do conhecimento, especialmente com a arte, por meio da exploração das formas e características de objetos, obras artísticas, pinturas, desenhos, mapas, formas encontradas na natureza, entre outras criações humanas ou naturais.

Participantes

Esta oficina foi realizada no Laboratório de Matemática do Uni-FACEF Franca-SP. Participaram da oficina jovem e adulta de 19 a 62 anos da turma do 3º ano da EJA totalizando 20 alunos, além de seus respectivos professores e coordenadoras.

Os dados e obras de Escher, além dos conceitos envolvidos na oficina: “Isometria: Desvendando Escher” foram apresentados em *datashow*.

O professor Aleff conduziu a oficina, os alunos prestaram atenção às explicações do professor, responderam às perguntas feitas sobre rotação, translação e reflexão, mostraram curiosidade sobre o trabalho de Escher.

Material

Os materiais utilizados na oficina foram: papel sulfite branco, cartolina colorida, régua, lápis preto, borracha, tesoura, fita crepe e lápis de colorir. A cartolina foi utilizada para fazer a tesselação.

Ao organizar as carteiras em cinco grupos com quatro carteiras, sobre cada carteira um quarto de cartolina colorida, um quadrado de papel sulfite no tamanho de 10 x 10, um lápis preto,

uma borracha, uma tesoura, um pedaço de fita crepe e uma caixa de lápis de cor.

Instrumento

Foi realizada a oficina com aplicações das atividades práticas de tesselação, utilizando os fundamentos e conceitos extraídos das técnicas utilizadas por Maurits Cornelis Escher, com o objetivo de trabalhar os conceitos de simetria e as transformações isométricas.

Desenvolvimento

É possível explorar vários assuntos relacionados ao ensino de geometria, de uma forma criativa e atraente, através de atividades que envolvem tesselação. A palavra tessellation, no português, remete ao vocábulo tessela, que indica a pavimentação de uma região através de peças de mosaico.

As tesselações do plano são o recobrimento do mesmo, sem deixar lacunas ou sobreposições. Nosso estudo refere-se a tesselações por polígonos, regulares ou não.

No trabalho sobre simetria e isometria em sala de aula, utilizou as tecnologias digitais como o *Powerpoint* e o *data show*, no intuito de agilizar a explicação do conteúdo, além da visualização e compreensão dos passos a serem realizados.

Em seguida, foi proposta uma atividade para trabalhar as transformações isométricas na composição de um desenho, que se tornará um molde para a aplicação das técnicas de Escher. A figura 14 mostra as características da oficina no que se refere ao espaço de trabalho, organização dos alunos e materiais de suporte.

Figura 14: Atividade prática



Fonte: Autoria própria

Os alunos foram desenvolvendo seus respectivos moldes, primeiro dobrando o papel cartão no formato de um quadrado, em seguida escolhendo alguns dos desenhos propostos na lousa para criarem os moldes da tesselação.

Após os alunos efetuarem os traços, recortaram e utilizaram as transformações isométricas para compor os desenhos, colando com fita crepe as partes modificadas, finalizando o molde como se observa na figura 15.

Figura 15: Transformações isométricas na construção de molduras



Fonte: Trabalho de Conclusão de Curso de Aleff Jouni Ribeiro e Lucas Borges Oliveira.

Na segunda etapa, com os moldes finalizados os alunos foram orientados a fazer uma margem de cinco centímetros na cartolina simulando uma moldura, assim quadros com estrutura semelhantes aos de Escher foram tomando forma e ao se dispor de alguma transformação isométrica os desenhos se encaixavam dando o efeito que denominamos tesselação. A figura 16 mostra os desenhos desenvolvidos pelos alunos em sala.

Figura 16: Tesselação desenvolvida pelos alunos



Fonte: Autores

Após a tesselação completa, surgiram trabalhos muito interessantes, pois os alunos tiveram a liberdade artística de decorar os desenhos de acordo com suas características, complementando com o efeito produzido pela simetria, dando aspecto padronizado através das transformações isométricas.

Figura 17 - Alunos do EJA no laboratório de matemática do Uni-FACEF.



Fonte: Autoria própria

Figura18 - Oficina de Escher: desenho de um aluno.



Fonte: Autoria própria

Os alunos conseguiram realizar a atividade com o suporte nas dúvidas junto ao professor e no final todos aplaudiram afirmando que foi um trabalho criativo, instigante e prazeroso.

Vários alunos, professores e coordenadora do Curso de Matemática passaram pelo Laboratório para prestigiar o trabalho de conclusão de curso e darem boas-vindas aos alunos do Curso de Educação de Jovens e Adultos.

4 Resultados da aplicação dos questionários

Buscou-se fazer uma análise das atividades realizadas no processo de ensino-aprendizagem, por meio de uma abordagem qualitativa e quantitativa, para avaliar por meio de questionários a percepção dos alunos em relação as atividades ministradas e se o trabalho, de certa forma, modificou a perspectiva deles em relação ao conceito sobre a disciplina de matemática e se os influenciou a continuar os estudos.

No primeiro dia, foi aplicado um questionário introdutório, a fim de conhecer o público da sala de aula, quem são essas

pessoas? Por que lá estão? Quais as profissões? Quais são seus anseios e expectativas? Estavam presentes 20 alunos, e abaixo apresenta-se os resultados obtidos.

O perfil da sala caracteriza-se por alunos entre 19 e 62 anos, de profissões variadas, como Manicure, Jardineiro, padeiro, sapateiro, cozinheira, Uber, entre outros.

Vamos às respostas das perguntas:

1 - Qual motivo o levou a retomar os estudos?

Gráfico 1 - Motivo que levou ao retorno aos estudos.



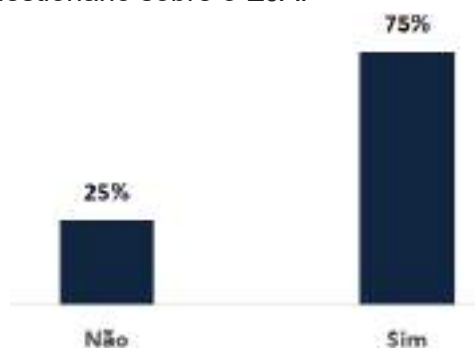
Fonte: Autoria própria

Resposta: 30% Ingresso no mercado de trabalho; 10% Curso Técnico; 20 % Ensino Superior; 30 % Realizações pessoais e 10 % outros.

Percebe-se então que os maiores percentuais de respostas estão relacionados ao campo profissional e a realização pessoal.

2 - Ao terminar o EJA, você pensa em fazer o ensino superior? Se sim, qual curso?

Gráfico 2 - Questionário sobre o EJA.

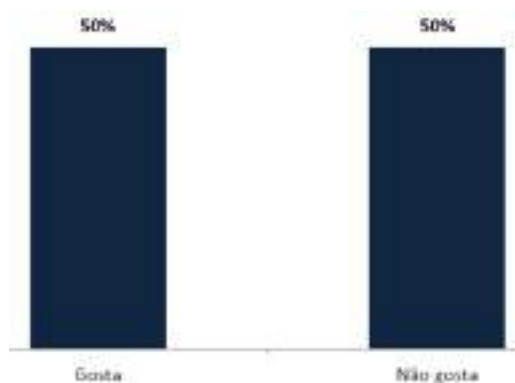


Fonte: Autoria própria

Resposta: 75 % dos alunos responderam que sim e 25% não, dentre os cursos mencionados como possibilidade de curso estão Direito, Pedagogia, Fisioterapia, Comissário de Voo, Teologia, Arquitetura, Contabilidade, Assistente Social e Enfermagem. Vê-se que a maioria da turma pensa em dar continuidade nos estudos, quando concluírem o Ensino Médio.

3 - Qual sua afinidade com a matemática?

Gráfico 3 - Nível de afinidade com a matemática.



Fonte: Autoria própria

Resposta: 50% responderam que gostam e 50% que não gostam.

No encerramento das atividades, aplicou-se um novo questionário que se refere à validação do trabalho executado.

A seguir gráficos com os resultados por questão:

4 - Você se sente mais motivado a estudar matemática? Sim ou Não?

Gráfico 4 - Motivação para estudar matemática



Fonte: Autoria própria

Resposta: 100% responderam sim

5 - Você acredita que a matemática pode ser aprendida de uma forma lúdica, simples e divertida? Sim ou Não?

Gráfico 5 - Questionário sobre o ensino da matemática.



Fonte: Autoria própria

6 - A oficina, de certa forma, te incentivou a cursar o ensino superior? Sim ou Não?

Gráfico 6 - Influência da oficina.



Fonte: Autoria própria

Resposta: 100% responderam sim

Constata-se que 100% dos alunos aprovaram e que muito deles, mudaram a forma como pensavam no início dos encontros. Por exemplo, todos os alunos responderam que se sentem mais motivados a estudar Matemática enquanto no primeiro momento o maior índice apontava para alunos que não gostavam da matéria. E também os indicadores apontam que os discentes acreditam depois da realização das atividades práticas, que a Matemática pode ser aprendida de forma simples, lúdica e divertida.

Por fim, mas não menos importante 100% dos alunos responderam que, após a aplicação da oficina e o fato de terem conhecido o Uni-FACEF, se sentem incentivados a cursar o ensino superior.

Os 25% que responderam no primeiro questionário que não tinham vontade em entrar na Academia, no questionário final afirmaram que foram estimulados e mudaram de opinião. Os comentários informais é que houve uma transformação de pensamento de toda a sala frente a matéria estudada e no que se refere as capacidades de si mesmo e no futuro de cada um.

5 Considerações finais

O ensino da matemática vai além de ensinar conteúdos, é preciso buscar a formação de um discente investigativo, que entenda que a matemática não está pronta e acabada, onde é possível errar e acertar para depois construir hipóteses. E particularmente, aprender matemática desencadeia vários outros conhecimentos, além de desenvolver a cognição e o raciocínio lógico, tão presentes no cotidiano.

As atividades lúdicas são recursos pedagógicos eficazes se forem bem articulados e planejados pelo professor, contribuindo assim para a construção do conhecimento matemático. Provavelmente, uma parcela das frustrações em relação à Matemática poderá ser minimizada se forem conectados o lúdico e o brincar aos conceitos por meio dos jogos, e mostrar que estudar Matemática também pode ser divertido, pode ser prazeroso.

Trabalhar atividades lúdicas como ferramenta no ensino da Matemática, reforça ainda mais sua importância como um instrumento norteador e facilitador do processo de ensino-aprendizagem.

Desse modo, ressalta-se o escopo dessas atividades ao propiciar a alunos do EJA, a experiência de ampliar os saberes, e ao mesmo tempo, favorecer esse estímulo para desenvolver suas capacidades intelectuais, e de certo modo a melhorar a qualidade de suas vidas, uma vez que o exercício mental estimula, de forma geral, uma melhor percepção sobre si e sobre a realidade na qual se vive.

Não existe uma idade certa para aprender, o indivíduo estará sempre em formação, por isso voltar a estudar além de ser uma necessidade na atual sociedade que vivemos competitiva, dinâmica, veloz e exigente no mercado de trabalho, é uma realização pessoal. E voltando a salientar o que Santos (2001:35) afirma: *“o lúdico deve ser constante na vida dos seres humanos,*

desde o início de suas vidas até a velhice”.

Referências

AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

BORIN, J. **Jogos e Resolução de Problemas**: Uma estratégia para as aulas de matemática. 2ª ed. São Paulo: IME-SP, 1996.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CARVALHO, Lidiane Pereira de; SILVA, Maria Aparecida Alves da; MÉLO, Risoneide Maria de. **Torre de Hanói e a função exponencial**. 2014.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da Autonomia. **Saberes Necessários à prática educativa**. Coleção leitura. 17ª edição. São Paulo: Paz e Terra, 2001.

HUIZINGA, J. **Homo ludens**. São Paulo: Perspectiva, 2005.
KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **Jogo, brinquedo, brincadeiras e a educação**. 4ª Ed. São Paulo, Editora Cortez: 2000

LEHR, Úrsula. **A revolução da longevidade impacto na sociedade na família e no indivíduo**, 1999.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. Campinas; SP. Ed. Papirus, 1990.

MANOEL, Luís Ricardo da Silva. **Torre de Hanói**. Disponível em <https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/torre_de_hanoi.pdf> Acesso em: 15/08/2019.

MEDEIROS, Marcel. **OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE NA PERSPECTIVA DO PROFESSOR PDE** Produções Didático-Pedagógicas 2013. Volume II, Versão On-Line ISBN 978-85-8015-075-9. Governo do Estado. Secretaria da Educação. Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_unioeste_mat_pdp_marcel_medeiros.pdf > Acesso em: 12/07/2019.

MOREIRA e Dias. **A importância dos jogos e dos materiais concretos na resolução de problemas de contagem no ensino fundamental**. Belo Horizonte, 2010.

NOÉ, Marcos. **Solucionando Quadrados mágicos**. Brasil Escola, 2019. Disponível em: <<https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/solucionando-quadrados-magicos.htm>>. Acesso em: 15/05/2019

PEREIRA, L. H. F.; KRIPKA, R. M. L.; SPALDING, L. E. S. **Matemática para inclusão de idosos**: estimulando a memória e o raciocínio. Universidade de Passo Fundo. 2017. Disponível em: <<https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/17/8/matematica-para-a-inclusao-de-idosos-estimulando-a-memria-e-o-raciocnio>>. Acesso em: 17/05/2019

PIAGET, Jean. **A Linguagem e o Pensamento da Criança**. Trad. Manuel Campos. São Paulo: Martins Fontes, 1986.

RIBEIRO, Aleff Jouni; OLIVEIRA, Lucas Borges. **Isometrias**: desvendando Escher-Trabalho de conclusão de curso do curso de Licenciatura em Matemática do Centro Universitário Municipal de Franca: Uni-FACEF, 2018.

SANTOS, Santa Marli Pires dos. **Brinquedoteca**: A Criança, o adulto e o lúdico. (org) Petrópolis, RJ: Vozes, 2000.

SNEYDERS, Georges. **Alunos felizes**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro: Record, 1968.

MATEMÁTICA FINANCEIRA APLICADA: à caderneta de poupança e ao título público NTN-B Principal.

Ana Beatriz Sousa Spirlandeli
Licenciada em Matemática – Uni-FACEF
Biaspirlandei1998@hotmail.com

Ms. Letícia Faleiros Chaves Rodrigues
Mestre em Matemática Universitária Docente do Uni-FACEF
leticia@facef.br

1 Introdução

Percebe-se a falta de conhecimento que as pessoas têm em matemática financeira e o dano que isso pode trazer, devido à falta de planejamento e organização das finanças pessoais. Inclusive, muitas pessoas vêem a poupança como o único investimento dentro do seu alcance, porém elas não imaginam que existem outros investimentos financeiros com uma melhor proposta que esta, onde há maior rentabilidade e menor risco do não recebimento do seu dinheiro investido. Diante disso, acreditamos que a matemática financeira deveria ser apresentada a todo público, principalmente nas escolas, onde deveria explorar o tema de forma adequada, assim propôs-se para este trabalho um estudo sobre capitalização simples e composta, bem como a pesquisa de dois dos diferentes tipos de investimentos, apresentando-os de forma matemática perante suas taxas de rentabilidade.

A porcentagem no mercado financeiro é muito importante, pois tudo se é calculado perante uma taxa dada em porcentagem. Por isto, no primeiro capítulo, foi feita uma contextualização histórica do tema e comparado com razão e proporção.

No segundo capítulo, mostramos o comportamento da capitalização composta x capitalização simples, onde foi feita uma comparação das fórmulas matemáticas, da progressão aritmética juntamente com juro simples e da progressão geométrica

juntamente com o juro composto, e depois de demonstradas e comparadas, foram associadas uma com a outra. Visto a expressão algébrica do juro simples e composto, comparamos as duas através de exemplos, ressaltando que a capitalização composta cresce exponencialmente enquanto a simples cresce linearmente. Sendo assim, confrontamos através de um gráfico, as duas capitalizações, destacando a diferença do crescimento entre elas.

Após todo esse estudo, no capítulo quatro, foi feita uma pequena pesquisa sobre algumas taxas e índices, a fim de aplicá-los nos investimentos, poupança e tesouro direto, com a finalidade de confrontá-los, de forma matemática, realçando suas taxas, rentabilidades e diferenças, a fim de obter uma pequena comparação entre um e outro.

2 Porcentagem

Para falarmos sobre porcentagem, precisamos entender sobre razão e proporção. Podemos afirmar que razão é uma comparação entre duas grandezas. Ao dividirmos duas grandezas, estamos comparando a primeira com a segunda, ea expressamos por uma fração. Proporção é uma igualdade entre duas razões, ou uma igualdade de frações. Vejamos um exemplo para melhor entendimento.

Exemplo 1: Foi feita uma arrecadação de dinheiro, para fundos sociais, através de voluntários, em um semáforo de uma cidade durante 4 dias. Observe as anotações:

- Dia 1 arrecadou-se R\$30,00
- Dia 2 arrecadou-se R\$45,00
- Dia 3 arrecadou-se R\$50,00
- Dia 4 arrecadou-se R\$75,00

A razão do dia 1 para o dia 2 foi de:

$$\frac{45}{30} = 1,5$$

E a do dia 3 para o dia 4 foi:

$$\frac{75}{50} = 1,5$$

Já que o resultado das duas razões foi igual a 1,5, podemos dizer que elas são iguais e igualdade de razões é sinônimo de proporção.

$$\frac{45}{30} = \frac{75}{50}$$

Assim, a porcentagem é uma razão centesimal, ou seja, uma razão onde seu denominador é igual a cem. Para acharmos uma porcentagem, precisamos de uma razão igualada a um número x sobre 100.

Exemplo 2: João comeu 2 fatias de uma pizza que fora dividida em 8 partes iguais. Qual a porcentagem que representa a quantidade de pizza que João comeu?

$$\frac{2}{8} = \frac{x}{100} \rightarrow 8x = 2 \times 100 \rightarrow x = \frac{200}{8} \rightarrow x = 25\%$$

Logo, João comeu 25% da pizza.

Dados históricos nos dizem que o surgimento da porcentagem aconteceu no século I a.C., em uma cidade de Roma, onde um imperador estabeleceu alguns impostos que deveriam ser cobrados aos mercadores. Um desses impostos foi denominado de “centésimo rerumvenalium”, que obrigava os comerciantes a pagarem um centésimo sobre todas as mercadorias vendidas no mercado público do país. Então se uma mercadoria fosse vendida por R\$50,00, o comerciante deveria pagar R\$0,50 ao imperador, o que é equivalente a um centésimo de R\$50,00.

Eram utilizadas na época as letras “p c”, no lugar do

que hoje usamos o símbolo “%” (lê-se por cento), para indicar porcentagem. Então o que hoje se escreve “15%”, os romanos da época escreviam “XV p c”.

Na época, o comércio de escravos era abundante e o imperador cobrava 1/25 (um vinte e cinco avos) sobre essas vendas, ou seja, o comerciante dividia o preço que o escravo fora vendido em 25 partes iguais, uma das partes era pago como imposto, e assim, o negociante ficava com as outras 24.

Já no século XV, como a movimentação do mercado era intensa, encadeou-se o surgimento de juros, lucros e prejuízos. Os matemáticos da época precisaram padronizar uma base para se calcular porcentagens, resolveram então, uniformizar a base 100.

Para se fazer uma porcentagem qualquer, basicamente divide a quantidade de percentual, que queremos saber, por cem e multiplica esse resultado pelo valor total que temos.

Exemplo 3: queremos saber quanto é 35% de 70

$$\frac{70}{100} \times 35 = 0,7 \times 35 = 70 \times 0,35 = 24,5$$

Agora, observe abaixo, se fizermos a conta utilizando dinheiro:

Exemplo 4: Ao comprar uma mercadoria que custava R\$70,00, por motivos maiores, o vendedor concedeu 35% de desconto.

$$\frac{35}{100} \times 70 = 0,35 \times 70 = 24,50$$

Logo, ele deu R\$24,50 de desconto e o valor restante que foi pago é igual a R\$45,50, que é equivalente a 65% de R\$70,00. Isto é:

$$70,00 - 24,50 = 45,50$$

$$100\% - 35\% = 65\%$$

Exemplo 5: Um corretor de imóvel avaliou uma casa em R\$ 210.000,00, porém conseguiu um comprador oferecendo R\$212.000,00. Visto que sua comissão é de 7,5% sobre o preço vendido, qual será o valor recebido pelo corretor em reais?

$$\frac{212000}{100} \times 7,5 = 2120 \times 7,5 = 15900$$

Portanto, sua comissão será de R\$15.900,00.

Exemplo 6: Um investidor, aplica R\$10000,00 em certa data, 3 anos depois, ele resgata o valor de R\$12000,00. Qual o ganho deste investidor?

$$\frac{12000}{10000} \times 100\% = 1,2 \times 100\% = 120\%$$

Ou seja, este investidor teve um ganho de 20%.

Assim, podemos perceber que a porcentagem também pode estar relacionada com uma taxa de juros. No caso de juros simples, se uma pessoa pede um empréstimo de R\$1000,00 com uma taxa de 10% de juros ao mês, e consegue liquidar o empréstimo depois de um mês, pagará R\$1100,00. Falaremos mais sobre juros simples no próximo capítulo.

3 Capitalização simples x Capitalização composta

As progressões são sequências numéricas muito utilizadas na geometria, música, funções exponenciais, matemática financeira, entre outros. Neste trabalho, será aplicada a Matemática financeira na ramificação de juros simples e composto.

3.1 Progressão aritmética e juros simples

Neste capítulo veremos que os juros simples se comportam como uma progressão aritmética, onde os juros crescem de forma constante ao longo do tempo.

3.1.1 Progressão Aritmética

Progressão Aritmética ou P.A é uma sequência numérica na qual cada um de seus termos é consequência do seu anterior adicionado a uma quantidade x , chamada razão.

Nomeamos os termos dessa sequência numérica como $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Exemplo 6:

$\{1, 3, 5, 7, \dots\} \rightarrow$ cada termo é igual ao seu anterior somado de dois

1 é o termo inicial (Termo a_1)

$3 = 1+2$ (Termo a_2)

$5 = 3+2$ (Termo a_3)

$7 = 5+2$ (Termo a_4)

Essa é uma P.A de razão 2.

Desta forma, dado um número qualquer a_1 , primeiro termo da sequência, adicionamos um número r , denominado razão da progressão, obtendo assim o segundo termo a_2 . Ao segundo termo adicionamos novamente a razão r obtendo o terceiro termo a_3 da progressão, e assim por diante, temos:

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2 \times r) + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = (a_1 + 3 \times r) + r = a_1 + 4r$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + r = (a_1 + (n-2)r) + r = a_1 + (n-1)r$$

Logo, podemos afirmar que o n -ésimo termo de uma P.A. é dado pela seguinte equação:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r$$

E é denominada Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética. Onde,

a_n é o n -ésimo termo;

a_1 é o termo inicial;

n é o número de termos que temos; e

r é a razão.

Exemplo 7: No conjunto numérico F , só possui os termos até o a_7 , e gostaria de encontrar o 11º termo desta P.A.

$F = \{215, 220, 225, 230, 235, 240, 245\}$

$a_n = a_{11}$ O termo que precisamos saber.

$a_1 = 215$

$n = 11$, pois quero saber o 11º termo

$r = 5$, nossa razão ($220 - 215 = 5$)

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \times r \\ \rightarrow a_{11} &= 215 + 10 \times 5 \\ \rightarrow a_{11} &= 215 + 50 = 265 \end{aligned}$$

Desse modo, nosso 11º termo é igual a 265.

Exemplo 8: Preciso achar o termo a_4 da P.A.:

$C = \{2, 6, 10, a_4, 18, 22\}$

Temos então que

$a_n = a_4$ é o que queremos saber;

$a_1 = 2$;

$n = 4$, pois queremos saber o termo a_4 ;

$r = 4$, que é nossa razão ($6 - 2 = 4$)

Substituindo então na fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times r$$

$$\rightarrow a_4 = 2 + 3 \times 4$$

$$\rightarrow a_4 = 2 + 12 = 14$$

Consequentemente, nosso conjunto numérico C, fica da seguinte forma:

$$C = \{2, 6, 10, 14, 18, 22\}.$$

3.1.2 Juros simples

Juros é o rendimento que se tem quando se empresta uma quantia por um determinado tempo. Em outras palavras, é um lucro que se recebe por emprestar um dinheiro.

O juro depende de uma taxa, aquela que, através da porcentagem, determina qual o lucro o indivíduo terá ao receber sua quantia de dinheiro que fora emprestado.

A conceituação de juros vem de 2000 a.C, onde babilônios cobravam juros de empréstimos de sementes. Na época, tudo era pago em sementes ou outros bens e a um prazo de colheita (até a semente dar frutos e ser colhida).

Dados históricos nos revelam também que cerca de 575 a.C, ainda na Babilônia, existiam banqueiros internacionais com escritórios que aderiram a estratégia do juro para emprestarem seus dinheiros. Essas firmas possuíam uma renda através de suas altas taxas de juros.

Existem registros de juros, também, em tábuas de argila usadas pelos povos que viveram na Mesopotâmia a cerca de 2100 a.C.

Além de muito antigo, o conceito de juro não mudou muito. O juro simples ainda é calculado a partir do capital inicial, sob uma taxa e por um determinado tempo. O valor da taxa, no juro simples, será sempre o mesmo valor para todos os períodos.

Exemplo 9: Considere, por exemplo, que uma pessoa aplicou R\$1000,00 por 12 meses e irá receber 10% de juros mensais, qual seria o ganho financeiro que esta pessoa receberia no fim desta operação?

$$1^{\circ} \text{ mês: } \frac{10}{100} \times 1000 = 100$$

$$2^{\circ} \text{ mês: } \frac{10}{100} \times 1000 = 100$$

E assim sucessivamente, até

$$12^{\circ} \text{ mês: } \frac{10}{100} \times 1000 = 100$$

Logo, ao final desta operação, esta pessoa terá $1000+100+100+\dots+100=1000+12 \times 100=2200$.

Podemos perceber que a capitalização simples, se comporta como a progressão aritmética, em que o primeiro termo, que representaremos por a_0 ao invés de a_1 , por conveniência de notação, é igual ao **Capital Inicial** (C_0) e a razão r é igual aos **Juros** (J) calculados sobre o valor do capital inicial:

$$J=C_0 \times i$$

Escrevendo os termos da progressão aritmética, temos

$$a_0 = C_0$$

$$a_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1 + i)$$

$$a_2 = C_0 + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i = C_0 + 2C_0 i = C_0(1 + 2i)$$

$$a_3 = C_0 + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i = C_0 + 3C_0 i = C_0(1 + 3i)$$

$$a_4 = C_0 + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i = C_0 + 4C_0 i = C_0(1 + 4i)$$

$\vdots$

$$a_n = C_0 + \underbrace{C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + \dots + C_0 \cdot i}_{n \text{ termos}} = C_0 + nC_0 i = C_0(1 + ni)$$

Em que a_n representa o Montante (**M**) dado pelo capital inicial mais os juros calculados sobre este capital após n períodos de capitalização. Portanto, podemos escrever

$$M = C_0 (1 + ni) \quad (3.1)$$

De maneira análoga, podemos definir a fórmula do juro simples,

$$J_1 = C_0 \times i$$

$$J_2 = C_0 \cdot i + C_0 \cdot i = 2C_0 i$$

$$J_3 = C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i = 3C_0 i$$

$$J_4 = C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i = 4C_0 i$$

⋮

$$J_n = \underbrace{C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + \dots + C_0 \cdot i}_{n \text{ termos}} = nC_0 i$$

Em que J_n representa o total de juros após um período n de aplicação.

Uma observação importantíssima que deve ser feita, é que a taxa e o tempo devem ser colocados na mesma unidade. Se a taxa for de 2% a.m (lê-se dois por cento ao mês), o tempo também deve ser expresso em meses. Quando não estiver representada na mesma unidade de tempo, deve ser feita uma conversão da taxa ou do tempo.

Converter taxa anual para mensal: $\frac{\text{taxa anual}}{12}$

Converter taxa mensal para anual: $\text{Taxa mensal} \times 12$

Converter taxa anual para diária: $\frac{\text{Taxa anual}}{365}$

Converter taxa mensal para trimestral: $\text{taxa mensal} \times 3$

Podemos observar que para fazermos uma transformação precisamos dividir a taxa, quando se quer uma taxa a um período menor do que já temos, ou multiplicar, quando queremos uma taxa a um período maior do que o que já temos, pois as taxas são

grandezas diretamente proporcionais.

Exemplo 10: Ao fazer um empréstimo de R\$100,00 com 1% de juro simples ao dia que só poderá ser pago após cinco dias. Será calculado, o valor do juro, em reais que será cobrado:

$$J = 100 \times 0,01 \times 5$$

$$J = 5$$

Portanto, o juro cobrado será de R\$ 5,00.

Exemplo 11: Foi feito um empréstimo de R\$ 10.000,00 com uma taxa de 4%a.m. onde a dívida será quitada em 2 anos. Qual o valor total que deverá ser pago ao fim do período?

Podemos observar que a taxa está sendo expressa em meses e o tempo está em ano. Precisamos fazer uma conversão. Tenho a taxa em meses e preciso converter para ano, portanto, devo fazer uma multiplicação da taxa que já tenho por 12, pois um ano têm 12 meses.

$$4 \times 12 = 48$$

Depois de convertida, nossa taxa é de 48%a.a.

Voltando a nossa pergunta inicial, precisaremos colocar nossos valores na fórmula do montante.

$$M = a_n = C_0 (1 + ni)$$

$$M = a_2 = 10000(1 + 2 \times 0,48) = 10000(1,96) = 19600$$

Desta forma, o valor total a ser pago ao fim dos dois anos será de R\$19.600,00.

Poderíamos também, converter ao invés da taxa, o tempo. Sabemos que 1 ano equivale a 12 meses, e assim, 2 anos equivalem a 24 meses. Desta maneira, continuaríamos com a taxa mensal que tínhamos no início, que era de 4%a.m.

$$M = a_n = C_0 (1 + ni)$$

$$M = a_{24} = 10000(1 + 24 \times 0,04) = 10000(1,96) = 19600$$

Assim, constatamos que ao final das duas contas, encontramos o mesmo resultado.

Neste sistema, o juro é calculado sobre o valor inicial, e não sobre o valor acumulado, como veremos no juro composto.

3.2 Progressão geométrica e juros compostos

Os juros compostos diferem dos juros simples, pois são calculados sobre o montante obtido no período anterior. Somente no primeiro período é que os juros são calculados sobre o capital inicial, ou seja, os juros compostos são um regime de juros sobre juros. Veremos a seguir, que os juros compostos se comportam como uma progressão geométrica.

3.2.1 Progressão geométrica

A progressão geométrica, chamada de P.G., é também uma sequência numérica, onde cada um de seus termos é resultado da multiplicação do seu anterior por uma constante, esta constante a denominamos de razão.

Da mesma forma, nomeamos os termos dessa sequência numérica como $(a_1, a_2, a_3 \dots a_n)$.

Exemplo 12:

$\{1, 3, 9, 27, 81 \dots\} \rightarrow$ cada termo é igual ao seu anterior multiplicado por três.

1 é o termo inicial (Termo a_1)

$3 = 1 \times 3$ (Termo a_2)

$9 = 3 \times 3$ (Termo a_3)

$27 = 9 \times 3$

$81 = 27 \times 3$

Essa é uma PG de razão 3.

Desta forma, dado um número qualquer a_1 , primeiro termo da sequência, multiplicando pela constante q , denominado razão da progressão, obtendo assim o segundo termo a_2 . Multiplicando o segundo termo novamente pela razão q obtendo o terceiro termo a_3 da progressão, e assim por diante, temos

$$a_1$$

$$a_2 = q \cdot a_1$$

$$a_3 = q \cdot a_2 = q \cdot (q \cdot a_1) = q^2 a_1$$

$$a_4 = q \cdot a_3 = q \cdot (q^2 \cdot a_1) = q^3 \cdot a_1$$

$$a_5 = q \cdot a_4 = q \cdot (q^3 \cdot a_1) = q^4 \cdot a_1$$

$$\vdots$$

$$a_n = q \cdot a_{n-1} = q \cdot (q^{n-2} \cdot a_1) = q^{n-1} \cdot a_1$$

Logo, podemos afirmar que o n -ésimo termo de uma P.G. é dado pela seguinte equação

$$a_n = q^{n-1} \cdot a_1$$

E é denominada fórmula do termo geral de uma progressão geométrica. Onde,

a_n é o n -ésimo termo;

a_1 é o termo inicial;

n é o número de termos que temos; e

q é a razão.

Exemplo 13: Na sequência numérica abaixo, temos até o termo a_3 e gostaria de encontrar o termo a_7 desta P.G.

$$(3, 12, 48)$$

Para encontrarmos a razão de uma P.G., basta dividirmos um dos termos, exceto o primeiro, pelo seu antecessor.

$$\frac{12}{3} = 4 = q, \text{ que é nossa razão}$$

Assim, $a_n = a_7$

$$O a_1 = 3$$

$$E n = 7$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \times q^{n-1} \\ \rightarrow a_7 &= 3 \times 4^6 \\ \rightarrow a_7 &= 3 \times 4096 \\ \rightarrow a_7 &= 12288 \end{aligned}$$

Neste caso o termo a_7 é 12288.

Exemplo 14: Gostaria de saber qual o termo a_5 da P.G. abaixo:

$$(5, 15, 45, 135, a_5, 1.215, 3.645)$$

$$q = \frac{15}{5} = 3, \text{ nossa razão é igual a } 3$$

$$a_1 = 5, \text{ nosso termo inicial}$$

$$a_n = a_5, \text{ o qual estamos procurando}$$

$$n = 5, \text{ o número do termo que gostaríamos de achar.}$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \times q^{n-1} \\ \rightarrow a_5 &= 5 \times 3^4 \\ \rightarrow a_5 &= 5 \times 81 \\ \rightarrow a_5 &= 405 \end{aligned}$$

Sendo assim, nossa P.G. ficaria da seguinte forma:

$$(5, 15, 45, 135, 405, 1.215, 3.645).$$

3.2.2 Juro composto

Diferente do juro simples, o juro composto é calculado em cima de juro acumulado, por isso, ele não será igual para todos os

períodos.

Exemplo 15: Considere que uma pessoa aplicou R\$1000,00 por 12 meses e irá receber 10% de juros mensais. Qual será o ganho financeiro que esta pessoa receberia ao fim desta operação?

Podemos dizer que a capitalização composta, tem uma reação igualada à progressão geométrica, onde o primeiro termo, que representaremos por a_0 , ao invés de a_1 , por conveniência de notação, é igual ao **capital inicial** (C_0) e a razão (q) é igual à taxa de **juros** (J) somado de 1, onde assim, a calcularemos exponencialmente através do tempo.

$$a_n = C_0 (1+i)^n$$

Pois, se escrevermos os termos da progressão geométrica, temos:

$$a_0 = C_0$$

$$a_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1+i)$$

$$a_2 = C_0[(1+i)(1+i)] = C_0(1^2 + 2 \cdot 1 \cdot i + i^2) = C_0(1+i)^2$$

$$a_3 = C_0[(1+i)(1+i)(1+i)] = C_0(1+i)^3$$

$$a_4 = C_0[(1+i)(1+i)(1+i)(1+i)] = C_0(1+i)^4$$

⋮

$$a_n = C_0 \underbrace{[(1+i)(1+i)(1+i) \cdots (1+i)]}_{n \text{ termos}} = C_0(1+i)^n$$

n termos

onde a_n representa o Montante (**M**) dado pelo capital inicial multiplicado por n vezes pela taxa de juro somada de 1, dependendo da quantidade de períodos de capitalização. Portanto, podemos escrever:

$$M = C_0 (1+i)^n \quad (3.2)$$

Podemos definir que a fórmula do juro composto é a

subtração do montante pelo capital inicial.

$$J_1 = a_1 - C_0 = [C_0(1+i)^1] - C_0$$

$$J_2 = a_2 - C_0 = [C_0(1+i)^2] - C_0$$

⋮

$$J_n = a_n - C_0 = [C_0(1+i)^n] - C_0$$

Onde J_n representa o total de juros após um período n de aplicação.

Vale advertir que a taxa e o tempo devem estar na mesma unidade de tempo. Duas taxas de juros são ditas equivalentes se aplicadas sobre um mesmo capital, em certo período de tempo, produzir o mesmo montante. Por exemplo, 1% ao mês é equivalente a 12,6825% ao ano, pois:

$$FV = 1000(1 + 0,01)^{12} = 1126,83$$

$$FV = 1000(1 + 0,126825)^1 = 1126,83$$

Assim, para determinar a taxa equivalente no juro compostos, usamos a seguinte fórmula:

$$\left(1 + \frac{i}{100}\right)^{\frac{\text{Prazo que quero}}{\text{Prazo que tenho}}} - 1$$

Lembrando que os prazos, tanto o prazo que já possuo como o prazo que quero possuir, deve estar sempre na mesma unidade de tempo.

Converter taxa mensal para anual: tenho a taxa de 1 mês e quero convertê-la para 1 ano, que equivale a 12 meses. Observe então, o expoente da fórmula:

$$i = \left(1 + \frac{\text{taxa mensal}}{100}\right)^{\frac{12}{1}} - 1$$

Converter taxa mensal para diária: quero uma taxa de 1 dia e já tenho uma taxa de 1 mês, que equivale a 30 dias. Observe o expoente:

$$i = \left(1 + \frac{\text{Taxa mensal}}{100}\right)^{\frac{1}{30}} - 1$$

Converter a taxa de 4% a.m. para a.a.:

$$i = \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{\frac{12}{1}} - 1$$

$$i = (1,04)^{12} - 1 = 1,6010 - 1 = 0,6010 = 60,1\% \text{ a. a.}$$

Converter a taxa trimestral para bimestral: quero uma taxa bimestral, equivalente a 2 meses, sendo que tenho uma taxa a trimestral, que equivale a 3 meses.

$$i = \left(1 + \frac{\text{taxa trimestral}}{100}\right)^{\frac{2}{3}} - 1$$

Exemplo 16: Uma casa avaliada em R\$210.000,00, foi financiada a juro composto com taxa de 0,32%a.m para ser quitada em 200 meses. Qual o valor total pago na casa ao fim do período?

$$M = 210.000(1 + 0,0032)^{200} = 210.000 \times 1,8945 = 397.854,24$$

Ao fim do período, o comprador terá uma dívida no valor de R\$397.854,24.

Exemplo 17: Foi feita uma aplicação de R\$ 10.000,00 com uma taxa de 10%a.a. a juro composto. Qual o ganho financeiro total que essa pessoa receberá após 14 meses?

Observe que a taxa está sendo expressa em anos e o tempo em meses. Neste caso, como visto anteriormente, deve ser feita uma conversão.

Há duas possibilidades de resolver este exercício. Pode-se converter a taxa para 1 mês ou direto para os 14 meses.

Modo 1: Queremos a taxa com prazo de 1 mês e temos ela em 1 ano, equivalente a 12 meses. Então:

$$i = (1 + 0,10)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,00797414 = 0,797414\% a.m$$

Colocaremos agora nossos dados na fórmula do montante de juro composto

$$M = C_o (1+i)^n$$

$$M = 10.000(1+0,00797414)^{14} = 10.000 \times 1,117613055 = 11.176,13$$

A pessoa lucrará então, o valor de R\$11.176,13.

Modo 2: Queremos a taxa com prazo de 14 meses e temos ela em 1 ano, equivalente a 12 meses. Então:

$$i = (1 + 0,10)^{\frac{14}{12}} - 1 = 0,117613054 = 11,7613054\%$$

A taxa já foi transformada direto para os 14 meses, por tanto, ao aplicar a fórmula do montante, pode-se elevá-la a 1, pois equivale a um período, já que possui uma taxa equivalente a 14 meses.

$$M = 10.000(1+0,117613054)^1 = 11.176,13$$

Então, a pessoa ganhará o valor de R\$ 11.176,13.

3.3 Capitalização simples x Capitalização composta

Como vimos anteriormente, a capitalização simples cresce de forma linear, ou seja, é uma função linear $f(x)=ax+b$, $x \geq 0$. Logo, temos a seguinte função:

$$f(n) = C_o (1+in) = (C_o i)n + C_o, n \geq 0$$

Onde, $a = C_o i$ e $b = C_o$.

Por outro lado, a capitalização composta cresce exponencialmente, ou seja, $g(x) = ba^x$, $x \geq 0$. Assim, temos

$$g(n) = C_o (1+i)^n, n \geq 0$$

Onde, $b = C_o$ e $a = 1+i$.

Vejamos a seguir um exemplo, comparando as duas capitalizações.

Exemplo 18: Considere que foi aplicado um capital de R\$28.000,00 a uma taxa de 7%a.m., por um período de 24 meses. Podemos verificar os resultados obtidos na tabela a seguir, onde mostra o montante através da capitalização simples e composta, para $n \geq 1$

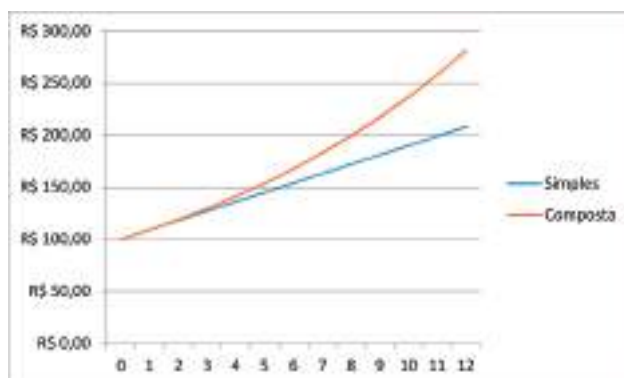
Tabela 1 - Capitalização simples x capitalização composta ($n \geq 1$)

n	Capitalização simples	Capitalização composta
0	R\$ 100,00	R\$ 100,00
1	R\$ 109,00	R\$ 109,00
2	R\$ 118,00	R\$ 118,81
3	R\$ 127,00	R\$ 129,50
4	R\$ 136,00	R\$ 141,16
5	R\$ 145,00	R\$ 153,86
6	R\$ 154,00	R\$ 167,71
7	R\$ 163,00	R\$ 182,80
8	R\$ 172,00	R\$ 199,26
9	R\$ 181,00	R\$ 217,19
10	R\$ 190,00	R\$ 236,74
11	R\$ 199,00	R\$ 258,04
12	R\$ 208,00	R\$ 281,27

Fonte: Autoria própria

Os resultados obtidos na tabela anterior foram representados no gráfico a seguir. Observe que, o crescimento é mais rápido quando o dinheiro é aplicado a juro composto. Perceba que as capitalizações simples e composta são iguais, para $n=0$ e $n=1$. E o regime de capitalização simples é menor que a capitalização composta para $n > 2$.

Gráfico 1 - Capitalização simples x capitalização composta ($n \geq 1$)



Fonte: Autoria própria.

Neste gráfico, podemos ver que o juro composto cresce exponencialmente, rápido e de forma com que o crescimento de cada período é maior que o crescimento do período anterior. Já o juro simples cresce de forma sucinta, linear, onde o crescimento de todos os períodos é igual. Há um crescimento, por período, nas duas capitalizações, porém um diferente da outro, sendo assim, o juro a ser pago ou o rendimento a ser recebido, na capitalização composta, é maior que na simples.

Exemplo 19: Considere agora, que um capital de R\$100,00 foi aplicado à uma taxa de 90%a.a., por um período de 12 meses, onde a taxa é dada ao ano e o tempo como frações do ano. Por exemplo, para encontrar o montante no 5º mês, em ambos os regimes de capitalização, obtivemos da seguinte forma:

$$\text{Simples} \rightarrow M_{\frac{5}{12}} = 10.000 \left(1 + 0,9 \times \frac{5}{12} \right) = 137,50$$

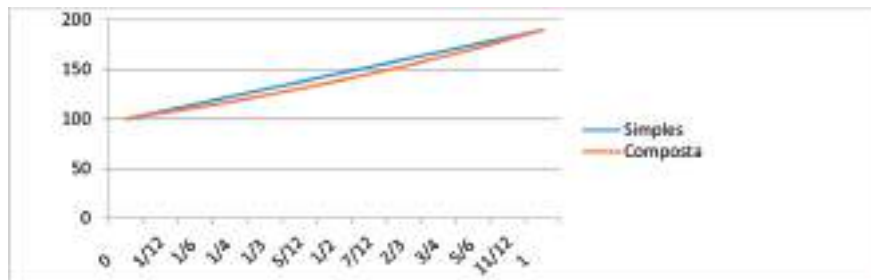
$$\text{Composta} \rightarrow M_{\frac{5}{12}} = 10.000(1 + 0,9)^{\frac{5}{12}} = 130,66$$

E assim, sucessivamente, os resultados obtidos foram representados na tabela a seguir.

Tabela 2 - Capitalização simples X capitalização composta ($0 < n \leq 1$).

n	Capitalização simples	Capitalização composta
0	100	100
1/12	107,50	105,49
1/6	115,00	111,29
1/4	122,50	117,41
1/3	130,00	123,86
5/12	137,50	130,66
1/2	145,00	137,84
7/12	152,50	145,41
2/3	160,00	153,40
3/4	167,50	161,83
5/6	175,00	170,72
11/12	182,50	180,10
1	190,00	190,00

Fonte: Autoria própria.

Gráfico 2 - Capitalização simples X capitalização composta ($0 < n \leq 1$).


Fonte: Autoria própria

Podemos perceber que, neste caso, a capitalização simples, para valores de $0 < n \leq 1$, é maior que o regime de capitalização composta. Não é de se espantar, isso acontece para que no período inteiro as duas capitalizações tenham o mesmo valor, pois se o crescimento da composta fosse maior, ao final ela continuaria sendo maior.

4 Investimentos: Poupança X Tesouro Direto

Há diversos tipos de investimentos financeiros seja para pessoas que visam poupar dinheiro, aumentar um patrimônio, construir uma reserva financeira para casos de emergências e até mesmo obter uma aposentadoria planejada. Mas antes, deve-se pesquisar e saber se está fazendo um bom investimento. Dentre uma série de investimentos que temos, será mostrado a seguir, a poupança e um título público do Tesouro Direto. Para tanto, serão apresentadas algumas taxas e índices, a fim de melhor compreensão de como funciona o mercado financeiro.

4.1 Taxas e Índice

4.1.1 O índice do Ipca

O índice de preços ao consumidor amplo (IPCA), é um índice que foi criado com o intuito de medir a variação de preços do mercado para o consumidor final. A importância desse índice dá-se pela circunstância de ter sido selecionado como o índice oficial de inflação. Ele é medido pelo instituto brasileiro de geografia e estatística (IBGE), que utiliza dados de 11 regiões metropolitanas do país e baseia-se no custo de vida de famílias que possuem renda entre 1 e 40 salários-mínimos. Para essas medidas, são calculadas as despesas como moradia, alimentação, saúde, educação, transporte, vestuário, entre outros.

4.1.2 Selic

A Selic é a taxa básica de juros da economia no Brasil. Sua sigla é a abreviação de “Sistema Especial de Liquidação e Custódia”. A taxa Selic nada mais é que um sistema do banco central para evitar o excesso de cédulas em circulação, a fim de

controlar inflação. Ela é atualizada a cada 45 dias, sendo assim, o comitê de política monetária do Brasil realiza um total de 8 reuniões por ano para a definição dessa taxa. Atualmente, a taxa Selic é a menor de todos os tempos.

4.1.3 Taxa referencial

A taxa referencial (TR) é calculada pelo Banco Central a partir da taxa líquida média mensal dos certificados de depósitos bancários (CDBs) com eliminação de uma taxa real associada a ela, da seguinte forma:

$$TR = \left(\frac{1 + TBF}{R} \right) - 1$$

A TR é utilizada na remuneração dos títulos da dívida agrária (TDA), dos recursos das cadernetas de poupança e do fundo de garantia do tempo de serviço (FGTS).

4.1.4 Taxa aparente e taxa real

A taxa aparente e a taxa real são duas taxas que andam juntas. Como os próprios nomes já indicam, a taxa aparente é uma taxa que aparenta ser um valor que não é. Já a taxa real, nada mais é que, o desconto da inflação sobre a taxa aparente. Vejamos a seguir um exemplo.

Exemplo 20: Foi realizado um investimento de R\$1.000,00 e após 1 ano o rendimento foi de R\$200,00, possuindo então, R\$1200,00 na conta.

Taxa aparente de rentabilidade:

$$t_a = \frac{1200,00}{1000} - 1 = 1,2 - 1 = 0,2 = 20\%$$

Porém, suponhamos que a inflação durante aquele ano

tenha sido de 6% a.a. A taxa real seria então:

$$t_r = \frac{(1 + 0,2)}{(1 + 0,06)} - 1 = \frac{1,2}{1,06} - 1 = 1,13207 - 1 = 0,13207 = 13,21\%$$

Portanto, podemos definir as seguintes fórmulas:

$$t_a = \frac{M}{C_0} - 1$$

$$t_r = \frac{(1 + t_a)}{(1 + i)} - 1$$

Ou ainda,

$$(1 + t_a) = (1 + t_r)(1 + i)$$

Sendo:

t_a a taxa aparente

M o montante do período

C_0 capital inicial

t_r a taxa real

i a inflação do período

4.2 Caderneta de poupança

A poupança no Brasil, criada por Dom Pedro II, é uma aplicação financeira que possui mais de 150 anos e que ainda preserva algumas de suas características originárias. A caderneta de poupança ganhou esse nome, pois no início eram utilizados pequenos cadernos para anotações da quantidade de dinheiro poupado e dos juros recebidos e que a finalidade de sua criação era oportunizar as classes mais pobres aplicar suas economias.

- 1861 – Dom Pedro II cria a poupança brasileira. Desde sua criação, pagava juros de 6% ao ano.
- 1871 – Criada a lei que permite os escravos a guardarem na poupança dinheiros conseguidos

através de doações, heranças e rendas provenientes de algum trabalho.

- 1964 – Criação da “correção monetária”, como forma de proteger a poupança da inflação.
- 1990 – Plano Brasil novo.
- 2012 – Reforma na rentabilidade da poupança.

Em março de 1990, Fernando Collor, Presidente da República da época, anunciou o plano “Brasil Novo”, conhecido hoje como “Plano Collor”. Em meio a tantas polêmicas, uma delas foi a retenção da poupança. Os correntistas que possuíam mais de 50.000 cruzeiros em suas poupanças, teria seu dinheiro retido pelo governo por um período de 18 meses, e após o reembolso do dinheiro, ele estaria corrigido a juros de 6% a.a. Esse bloqueio de dinheiro, foi denominado como “confisco da poupança”. Passados os 18 meses, a promessa não fora cumprida, sendo assim, o dinheiro não fora devolvido aos correntistas.

Desde a correção monetária de 1964 até a reforma de 2012, a aplicação dispunha de um lucro mensal de 0,5% a.m. e correção monetária dada pela Taxa Referencial. A partir de 4 de maio de 2012, foi determinada uma nova regra para rendimentos dos novos depósitos. Quando a taxa Selic for maior que 8,5% a.a., o lucro, será o mesmo de antes da regra, 0,5% a.m. + TR. Quando a taxa Selic for menor ou igual a 8,5% a.a., o rendimento será 70% da taxa + TR. Os depósitos que foram feitos antes da reforma, continuam a render com a regra antiga.

Exemplo 18: Suponhamos que antes da reforma, em um mês e um ano qualquer, a taxa Selic anual tenha sido de 6,5% e a TR 0,69%. Foi feita uma aplicação no valor de R\$10.000,00. Depois de um mês, quanto terá rendido?

Como a data é antes da reforma, calculamos o rendimento como $0,5\% + TR$, então:

$$10000 \times 0,5\% + 10000 \times TR = 10000 \times \frac{0,5}{100} + 10000 \times \frac{0,69}{100} = 50 + 69 = 119,00$$

Portanto, a rentabilidade desse dinheiro aplicado na poupança durante um mês, foi de R\$ 119,00.

Exemplo 19: Se esse dinheiro fosse aplicado sobre a mesma taxa Selic, a mesma TR e o mesmo período, porém agora, depois da reforma, quanto renderia a aplicação?

Como a data, agora, é depois da reforma e a Selic é menor que 8,5%, então calculamos 70% da Selic + TR. Ou seja:

$$\begin{aligned} 70\% \times \text{Selic} &= \frac{70}{100} \times \frac{6,5}{100} = 0,7 \times 0,065 = 0,00455 \\ 10000 \times \left(\frac{70}{100} \times \text{selic} \right) &+ 10000 \times TR \\ &= 10000 \times 0,00455 + 10000 \times 0,069 = 45,5 + 69 = 114,50 \end{aligned}$$

Na tabela abaixo, podemos observar quais os aspectos positivos e negativos para fazer-se um investimento na caderneta de poupança.

Apesar do baixo retorno financeiro, a poupança é um dos investimentos mais utilizados pelos brasileiros, talvez por falta de conhecimento, insegurança, ou por ser uma questão cultural do Brasil.

4.3 Tesouro Direto

O Tesouro direto é um tipo de investimento financeiro, onde o dinheiro aplicado é emprestado ao Governo Federal para financiamentos de áreas da educação e da saúde do País. Ao investir seu dinheiro, você o recebe acrescido de juros, na data de vencimento que é estabelecida no momento da compra do título.

Por ser totalmente garantido pelo Governo Federal, se trata de um título seguro, independente da quantia investida. Os únicos

riscos ocasionados pelo tesouro direto são o risco de mercado e o risco de crédito.

O risco de mercado trata-se de uma perda por contado preço dos títulos, no momento de uma possível venda. Se você adquire um título de longo prazo, e por uma necessidade, deseja vender antes do vencimento, você deverá aceitar o preço que o mercado estiver pagando, no dia da venda, pelo título. Sendo assim, você corre o risco de ter uma rentabilidade negativa. Por isso, é de grande importância que se compre um título de acordo com o prazo que você pode investir.

Risco de crédito é o risco que se ocorre quando o emissor do título, por motivos maiores, não consegue quitar suas dívidas. Uma espécie de calote, em que os economistas chamam de default. Por ser o governo federal seu emissor, o risco de crédito é minúsculo, já que, se acontecer, o governo pode aumentar impostos para cumprir com suas dívidas.

Sua rentabilidade está de acordo com cada tipo de título existente. Na hora da contratação do título, o investidor sabe ou não a quantia que receberá de volta. Existem os títulos que o valor a receber já fica definido no ato da contratação e existem títulos que vão depender de taxas ou índices, como taxa Selic ou IPCA. A rentabilidade deste investimento é maior que da poupança.

Portanto, ao investir no tesouro direto, além do seu dinheiro estar rendendo, você ainda está contribuindo com o crescimento do país. A rentabilidade dos títulos do tesouro direto subdivide-se em três:

- **Atrelados à inflação:** são papéis que pagam uma taxa fixa mais o IPCA do período, por exemplo, 4,0% + IPCA.
- **Prefixados:** estes títulos possuem uma taxa anual fixa, como 10% ao ano.
- **Indexado à taxa Selic:** como o nome já diz, o Tesouro Selic possui rendimento atrelado à taxa básica de juros.

Dentre os vários tipos de títulos presente no tesouro direto, iremos abordar o *NTN-B Principal – Notas do Tesouro Nacional série B Principal*, que é o título onde sua rentabilidade depende da inflação oficial IPCA junto com a taxa de juros reais definida na hora da compra. Sua rentabilidade varia até a data de vencimento do título.

Segundo Hazzan e Pompeo (2014), podemos chamar de 0 a data de emissão da NTN-B Principal e de n a data de seu vencimento. Foi feita uma negociação em uma data m entre a data de emissão e a data de vencimento (entre 0 e n). Sejam n_1 o prazo em anos entre 0 e m e seja n_2 o prazo em anos entre m e n . Sejam j_1 e j_2 as taxas de inflação medidas pelo IPCA entre as datas 0 e m e entre m e n , respectivamente e seja também r a taxa real anual estabelecida pelo Tesouro Nacional na data da compra. Assim teremos:



- A taxa acumulada de inflação entre 0 e n é dada por

$$j_{ac} = (1+j_1)(1+j_2) - 1$$

- Para o cálculo do montante final de resgate, usamos a fórmula dos juros compostos que vimos no capítulo 3, onde $FV = PV(1+i)^n$, porém i será a taxa acumulada do IPCA.

$$M = C_0 (1+J_{ac}) = C_0 (1+j_1)(1+j_2).$$

- Em cada data m , caso ocorra uma negociação do título, o mesmo é vendido pelo valor atual de M , considerando a taxa real anual r designada no ato da compra (ou venda) e a taxa de inflação da data m até o vencimento

(j_2) . Assim, o preço de venda (ou compra) é dado pelo valor atual.

$$V_{n_2} = \frac{C_0(1+j_1)(1+j_2)}{(1+j_2)(1+r)^{n_2}} = \frac{C_0(1+j_1)}{(1+r)^{n_2}}$$

Vejamos um exemplo

Exemplo 20: Um NTN-B Principal foi emitido por R\$ 1.000,00 com o prazo de vencimento para 10 anos (120 meses, contendo 21 dias úteis cada).

- a) Depois de 4 anos, se a IPCA desde a emissão for 26,25% e a taxa real de negociação for de 5% a.a., qual será o preço do título?

Então temos: $j_1 = 26,25\%$, $r = 5\%$ a.a. e $n_2 = 6$ anos.

Aplicando a fórmula mostrada anteriormente, temos:

$$V_4 = \frac{1.000(1+0,2625)(1+j_2)}{(1+j_2)(1+0,05)^6} = \frac{1.000(1,2625)}{(1,05)^6} = \frac{1.262,5}{1,34} = \text{R\$ } 942,10$$

- b) Mais um ano se passou e o IPCA agora desde a emissão é de 33,82% e taxa real de negociação é de 3% a.a., qual será o novo preço do título?

Temos então: $j_1 = 33,82\%$, $r = 3\%$ a.a. e $n_2 = 5$ anos.

$$V_5 = \frac{1.000(1+0,3382)}{(1+0,03)^5} = \frac{1.000(1,3382)}{(1,03)^5} = \text{R\$ } 1.154,34$$

Portanto, se um investidor comprou um título NTN no ano 4 por R\$ 942,10 e vendeu um ano depois por R\$ 1.154,34, sua taxa aparente de rentabilidade foi de $i_a = \frac{1.154,34}{942,10} - 1 = 22,53\%$, e ao

fazermos as contas, podemos ver que corresponde a uma taxa real de $r_r = \frac{1,2253}{1,06} - 1 = 15,59\% \text{ a.a.}$, pois a taxa de inflação do período foi de $\left(\frac{1,3382}{1,2625} - 1\right) = 6\%$.

Desta forma, o investidor foi beneficiado pela redução da taxa real de juros do título. De modo contrário, se a taxa tivesse aumentado para 7% a.a., por exemplo, seu preço seria dado por:

$$V_5 = \frac{1.000(1 + 0,3382)}{(1 + 0,07)^5} = \frac{1.000(1,3382)}{(1,07)^5} = \frac{1.338,20}{1,4025517} = R\$ 954,12$$

Neste caso, sua taxa de rentabilidade seria apenas $\frac{954,12}{942,10} - 1 = 1,28\%$, o que daria uma taxa real negativa de -4,46%.

Assim, podemos observar que, se o investidor comprar o título no ano 4 e mantiver até o vencimento, seu preço no final será:

$$V_{10} = \frac{1.000(1,2625)(1 + j)}{(1,05)^0} = R\$ 1.262,50(1 + j)$$

Onde j é a taxa acumulada do IPCA do ano 4 até o final. Portanto, da data do ano 4 até a data do ano 10, a taxa de rentabilidade acumulada será $\frac{1.262,50(1+j)}{942,10} - 1 = 0,03401(1 + j) - 1$ e a taxa real no período será $\frac{1,3401(1+j)}{(1+j)} - 1 = 34,10\%$ no período de 6 anos, o que dá uma taxa real anual de $(1,3401)^{\frac{1}{6}} - 1 = 5\% \text{ a.a.}$

Portanto, ao adquirir uma NTN-B Principal a certa taxa anual e mantê-la até o vencimento, o retorno financeiro será exatamente a taxa real anual do ato da compra e a correção monetária pelo IPCA do período. É claro que essa rentabilidade é bruta, precisando deduzir daí, os encargos como o imposto de renda, taxa de estadia etc.

Exemplo 21: Supondo que nos próximos 15 anos a taxa anual de inflação seja sempre 4% a.a. e que cada mês tenha 21 dias úteis. Se uma NTN série B Principal for emitida por R\$1000,00.

Qual será o valor de resgate?

$$V_{15} = \frac{1000 \times (1 + 0,04)^{15}}{(1 + r)^0} = 1800,94$$

Ou seja, a taxa aparente de rentabilidade será:
 $t_a = \frac{1800,94}{1000} - 1 \cong 80\%$.

Ao considerar a taxa Selic atual, que é 6% ao ano, o rendimento da poupança está em 4,2% ao ano (0,7×6%). Em termos de ganho real, isto é, ao considerar a inflação acumulada de 3,37%, o retorno efetivo é de apenas 0,83% no ano todo.

Ao fazer o cálculo, na poupança, você deixa de ganhar quase o dobro que o Tesouro Direto pode oferecer ou até mesmo perder para inflação. E, quando o valor for aplicado no médio ou longo prazo, o efeito é ainda mais perceptível, porque ele conta com os juros compostos e taxas maiores.

Comparando o tesouro direto e a poupança, podemos perceber que o Tesouro Direto é mais vantajoso, pois a liquidez dele é em D+1, ou seja, você solicita o resgate hoje e recebe no outro dia, enquanto a poupança, caso você resgate o valor antes da data de aniversário da mesma, você não recebe o ganho dos juros daquele período. O tesouro direto praticamente não possui risco de crédito, visto que é o governo quem é responsável por garantir o recebimento do mesmo, caso não seja possível cumprir com o crédito, o mesmo pode aumentar os tributos, dentre outras medidas, já a poupança, como aconteceu na época do Collor, as pessoas tiveram seus créditos confiscados. O título público possui uma rentabilidade melhor, visto que é atrelada a inflação, enquanto a poupança pode ter um rendimento negativo, por correr o risco de ter um rendimento menor que a inflação. Portanto, ao obter uma reserva financeira, é de grande importância que se faça uma seleção de alguns tipos de investimento e se faça também uma pesquisa, das taxas e atributos do mesmo, e os compare a fim de verificar se este investimento é viável.

5 Considerações finais

Atualmente nos deparamos com a falta de conhecimento em matemática financeira pela maioria das pessoas, não se organizam e não planejam seus orçamentos e finanças, seja na hora de utilizar um financiamento ou na hora de poupar uma quantia. Diante do cenário atual, onde a aposentadoria de muitos pode estar comprometida, faz-se necessário buscar conhecimento sobre matemática financeira e investimentos, para auxiliar na tomada de decisão e gerenciamento de suas finanças.

Assim, o objetivo do presente trabalho foi apresentar alguns conhecimentos básicos em matemática financeira, como juros simples e juros compostos, fazendo uma comparação entre ambos e envolvendo com alguns conceitos de matemática. Visando aplicar estes estudos, mostramos também a matemática financeira por trás de alguns investimentos, como a poupança e um dos títulos públicos.

Acreditamos que a mesma deveria ser apresentada a toda a sociedade, principalmente nas escolas, perante a necessidade e importância de se obter informações antes de realizar um empréstimo, aplicar uma quantia e principalmente um planejamento financeiro pessoal. Quando o professor faz um levantamento da matemática envolvida nos cálculos da capitalização simples e composta e trás para os dias atuais, torna a disciplina mais interessante e prazerosa.

Como aplicação, destacamos a poupança, por ser o investimento que a maioria dos brasileiros utiliza, talvez por cultura ou por falta de conhecimento, pois se trata de um dos piores, em termos de rentabilidade. E apresentamos informações também sobre os títulos públicos, este que podem ser obtidos direto no site <https://www.tesourodireto.com.br/>. Abordamos a NTN-B Principal que depende da taxa de inflação básica IPCA, e que tem um bom rendimento. Mas há uma infinidade de investimentos, que não foram

discutidos no trabalho, que também apresentam bons rendimentos e podem ser explorados.

Referência

ASSAF NETO, Alexandre. Matemática financeira e suas aplicações. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

BRANCO, Anísio. Matemática financeira aplicada: método algébrico, HP-12C: Microsoft Excel. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

FERREIRA, Roberto. Matemática financeira aplicada. 8. Ed. São Paulo: Atlas, 2014.

GOUVEIA, Rosimar. Progressão Geométrica. TodaMatéria, 2019. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/progressao-geometrica/>>. Acesso em 13 de março de 2019.

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. Matemática financeira. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2014.

IEZZY, Gelson.; HAZZAN, Samuel.; DEGENSZAJN, David. Fundamentos da matemática elementar. 1. ed. vol. 11. São Paulo: Atual Editora, 2004.

TESOURO DIRETO - O que é, rentabilidade, como investir, taxas [guia]. Blog Rico, 2019. Disponível em: <<https://blog.rico.com.vc/tesouro-direto-o-que-e-como-investir>>. Acesso em 16 de setembro de 2019.

O USO DO CMSP NA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO NO CONTEXTO DA PANDEMIA COVID-19

Larissy Batista Cintra
Professora e licenciada em Matemática do Uni-FACEF

Rafaela Dalalian Souza Boneti
Professora e licenciada em Matemática do Uni-FACEF

Sílvia Regina Viel
Doutora em Educação Matemática e Docente do Uni-FACEF
silviarviel@gmail.com

1 introdução

Mudanças acontecem, é possível observar isso por meio dos acontecimentos dentro da História, ou por meio de um simples dia de uma pessoa. Que as transformações estão entre nós é uma afirmação verdadeira e que podemos perceber quando olhamos para nós mesmos. Grandes mudanças geralmente levam tempo, mas não foi o que aconteceu com a pandemia da Covid 19.

O ano 2020 teve início com muitas incertezas, notícias advindas de outros países sobre um vírus desconhecido que tomou conta dos noticiários e redes sociais. Dúvidas sobre como seria o ano começaram a surgir relacionadas a diversas áreas e a pandemia ocorrida neste ano gerou realmente um grande impacto em todo o mundo.

A pandemia que teve início na China em dezembro de 2019 chegou ao Brasil em fevereiro de 2020. Por onde passou realizou diversas mudanças que permanecerão quando tudo acabar como nas relações sociais, economia, política, em todas as rotinas, inclusive escolares.

Este artigo mostra a trajetória da Covid-19 por meio de uma cronologia dos acontecimentos e apresenta o Centro de Mídias de São Paulo-CMSP, que é uma ferramenta criada para dar conta dessa situação nas escolas como resposta da Secretaria

da Educação do Estado de São Paulo a esse momento inusitado em que as aulas passaram a ser remotas, junto ao CMSP. Uma das mudanças que ocorreram foi o início do utilização do material Aprender Sempre.

Este artigo tem como objetivo contribuir com futuras pesquisas, para que com ele os pesquisadores encontrem algumas das mudanças que foram acarretadas pela chegada da pandemia covid-19. O CMSP foi uma grande mudança que a secretaria da educação do Estado de São Paulo realizou na educação.

Este trabalho está dividido em três partes, a segunda parte fala sobre a Covid 19 e apresenta uma breve retomada sobre como foi a trajetória do vírus; a terceira parte é sobre o Centro de Mídias de São Paulo, nela será possível ver o que é o CMSP, para quem é destinado, quais seus objetivos, entre outras informações e a quarta parte apresenta o novo material “Aprender Sempre”.

2 Covid 19

No Brasil, em janeiro de 2020, os meios de comunicação começaram a divulgar casos no mundo sobre um vírus ainda desconhecido. Inicialmente haviam algumas pessoas infectadas na China e haviam informações de que possíveis óbitos poderiam ter sido causados por conta dessa infecção.

Ali começara uma preocupação, pois com o crescente desenvolvimento da humanidade e com a globalização, é possível perceber que os países estão mais interligados, seja remotamente ou fisicamente. As viagens por conta de turismo, viagens a negócios e outras colocavam os meios de transporte urbanos, as linhas férreas e aéreas em observação, pois algo que surge em um lugar do mundo, hoje é facilmente transportado.

2.1 Sobre Coronavírus

Há alguns anos ouvimos falar sobre a família de vírus coronavírus, pois em 2002 existiu uma epidemia que percorreu 29 países, alguns estudos foram realizados para uma possível vacina. Em 2016 já se tinha uma vacina pronta que combatia o Sars 2002 e MERS 2012, mas quando se teve o controle da epidemia o investimento para as pesquisas foi cortado.

Em 2002, na Província chinesa de Guangzhou, um vírus desconhecido causou o surto de uma doença potencialmente letal. Os cientistas chamaram de Sars (sigla em inglês para síndrome respiratória aguda grave). Mais tarde, descobriu-se que o patógeno causador da doença é um coronavírus que se originou em um animal e se espalhou entre os seres humanos. Mas a epidemia de Sars foi controlada e o estudo das vacinas contra o coronavírus foi abandonado. Anos depois, em 2012, outro coronavírus perigoso, o Mers-Cov, ressurgiu, causando uma doença respiratória grave, a Mers (síndrome respiratória do Oriente Médio), que se originou em camelos e se espalhou para os seres humanos. (NAVAS, 2020, UOL).

De acordo com o Ministério da Saúde há uma grande família do coronavírus em várias espécies de animais, como: camelos, gado, gatos e morcegos. Raramente esses vírus atacam os animais, mas podem atacar os seres humanos, como por exemplo, MERS-CoV e SARS-CoV. A propagação do vírus SARS-CoV-2, mais conhecido como COVID-19, iniciou-se em Wuhan na China. O COVID-19 pode apresentar uma variação no quadro clínico que vai de infecções assintomáticas a graves.

Os sintomas mais comuns são: tosse, febre, coriza, dor de garganta, dificuldade para respirar, perda de olfato, alteração do paladar, distúrbios gastrintestinais (náuseas/vômitos/diarreia), cansaço, diminuição do apetite e dispneia (falta de ar). Os sintomas

podem variar de um simples resfriado a uma Síndrome Gripal-SG, que é quando existe um quadro respiratório agudo. A transmissão ocorre por meio do aperto de mãos contaminadas, gotículas de saliva, espirro, tosse e por meio do contato com objetos ou superfícies contaminadas.

Para evitar a contaminação, as recomendações são que a população lave as mãos com água e sabão constantemente, que não encoste nos olhos, boca ou nariz sem antes ser realizada a higienização das mãos, é sugerida a utilização de lenço ou da própria roupa para cobrir uma tosse ou espirro.

Os órgãos de saúde pedem que as pessoas permaneçam em casa, e orientam que quando for necessário sair mantenham distância de pelo menos um metro das outras pessoas. Tornaram o uso da máscara obrigatório por meio de leis e constantemente lembram a importância de ficar saudável em um momento como este, como ter uma boa alimentação e dormir bem. Até o momento da escrita deste artigo, estudos e testes clínicos são realizados para a imunização e tratamento.

2.2 Trajetória do vírus pelo mundo

A seguir será apresentada a trajetória do vírus pelo mundo até a chegada no Brasil, a tabela tem a função de facilitar a visualização das informações tiradas da aba “notícias” encontrada no site gov.br, que é o site do governo do Brasil. As informações da tabela têm o objetivo de mostrar desde os primeiros casos na China em dezembro de 2019, até o primeiro caso no Brasil em fevereiro de 2020.

Data		
08/12/2019	Primeiros casos	Pneumonia em hospital de Wuhan/China.
30/12/2019	Notificação para OMS	Foi realizada uma estatística dos casos da "pneumonia de causa desconhecida".
03/01/2020	Ministério da Saúde detecta Solicitação de esclarecimento	"pneumonia de causa desconhecida" na China. Brasil pede informações à OMS.
05/01/2020	1º Comunicado da OMS	44 casos de "pneumonia de causa desconhecida" relacionada ao Mercado de Frutos do Mar de Wuhan/China.
09/01/2020	Identificação do vírus	Divulgado o código genético do coronavírus na China.
10/01/2020	Monitoramento	Comitê de Monitoramento de Eventos do Ministério da Saúde é acionado.
16/01/2020	Boletim Epidemiológico	Ministério da Saúde pública a primeira informação sobre o que se sabia sobre a doença.
20/01/2020	OPAS/OMS	Reunião para alinhamento da estratégia internacional de resposta.
21/01/2020	1º Boletim Epidemiológico da OMS	Risco moderado.
22/01/2020	Ativação do COE-nCoV	Comitê de Operações de Emergência (COE) é ativado em nível 1 de alerta, sem casos suspeitos.
27/01/2020	1º caso suspeito	Alteração do COE para nível 2 (perigo iminente) com mudança na definição de caso.
28/01/2020	OMS altera posicionamento	Organismo admite erro e eleva risco para "alto".
30/01/2020	ESPII	OMS declara Emergência Internacional.
31/01/2020	GEI-ESP	Acionado o Grupo Executivo Interministerial.
03/02/2020	1. Emergência Nacional 2. 1ª Reunião GEI ESPII	1) Brasil declara Emergência de Saúde Pública de Importância Nacional (ESPIN). 2) Realizada primeira reunião do Grupo Executivo Interministerial em Saúde Pública (GEI-ESPII).
04/02/2020	Projeto de Lei de Quarentena	Ministério da Saúde envia Projeto de Lei ao Congresso Nacional.
04 e 05/02/2020	Congresso Nacional aprova Projeto de Lei	Legislativo aprova lei sobre quarentena.
05/02/2020		Brasil realiza missão para repatriamento de 34 brasileiros que viviam na cidade de Wuhan, na China.
06/02/2020	CIT sobre o coronavírus	Reunião na Comissão Intergestores Tripartite (CIT) sobre o coronavírus com secretários de saúde dos Estados e capitais.

07/02/2020	Sancionada Lei de Quarentena	Presidente da República sanciona Lei de Quarentena • Ministério da Saúde e Fiocruz realizam capacitação técnica de representantes de 9 países das Américas do Sul e Central para diagnóstico laboratorial do coronavírus • Operação Regresso - Decolagem de Wuhan com destino ao Brasil (início da quarentena).
09/02/2020	Chegada ao Brasil dos 58 envolvidos na Operação Regresso	
19/02/2020		Brasil apresenta ações para enfrentamento ao coronavírus durante reunião dos ministros da Saúde do Mercosul em Assunção, no Paraguai.
21/02/2020		Ampliação para mais sete países em alerta para casos suspeitos da doença, além da China.
23/02/2020		Os brasileiros repatriados, que estavam de quarentena na base militar de Anápolis (GO), são liberados.
24/02/2020		Ampliação da lista de países em alerta para casos suspeitos para mais 8 países, totalizando 16 países.
26/02/2020		Confirmado o primeiro caso de coronavírus no Brasil, em São Paulo.

Fonte: Tabela elaborada pelas autoras com informações do site gov.br.

Por meio da tabela acima é possível observar que os países tentaram correr contra o tempo, mas o vírus se espalhou rapidamente, em dois meses o que era considerada uma gripe desconhecida se tornou pandemia e com muitos casos de óbitos. Em fevereiro de 2020 a preocupação já era compartilhada entre os brasileiros, e foi quando o primeiro caso no Brasil foi diagnosticado.

2.3 Chegada do vírus no Brasil

Segundo Vargas e Lindner (2020), o primeiro caso de covid-19 constado no Brasil foi em 26 de fevereiro, (foi pedido para que todos os Estados verificassem os óbitos por síndrome respiratória aguda grave deste ano, para que se fosse o caso de mudar a data do primeiro caso).

De acordo com Albuquerque (2020) a chegada do vírus

causou preocupação e medo, mas os especialistas explicam que se as recomendações indicadas fossem seguidas não teria grandes consequências.

Com a chegada do vírus ao Brasil, diversos lugares pararam de funcionar. Os estados decretaram, cada um com suas diferentes formas, como deveria ser a quarentena, pois o governo federal autorizou aos governadores dos estados a decisão de como deveria acontecer. Com isso boa parte da população brasileira começou a ficar em casa, pois as regras determinadas por grande parte dos estados foram para que iniciasse o distanciamento social, fazendo com que assim funcionassem apenas serviços considerados essenciais à vida.

2.4 Como foi a chegada da informação do novo vírus nas escolas da rede estadual de São Paulo

No dia 28 de fevereiro, as escolas do estado de São Paulo receberam o comunicado externo conjunto (SAGESP/SAINTER/COPED/EFAPE) N^o 23/2020, que tinha o objetivo salientar a importância da informação e formação da rede estadual sobre o coronavírus. Em seguida algumas ações preventivas foram passadas, como os cuidados com higiene, formas de contágio e sintomas para que assim não houvesse desinformação.

Ficou estabelecido que de 02 a 06 de março haveria mobilização da rede estadual para que as discussões sobre prevenção acontecessem. As diretorias de ensino, as escolas e os estudantes deveriam se organizar em relação às atividades que aconteceriam durante os dias, para que assim as informações fossem divulgadas. Com o documento orientador para o dia D de prevenção ao coronavírus e o cronograma para a semana de prevenção, foi possível desenvolver as atividades estipuladas para essas datas.

Por meio das orientações do governo, houve a suspensão

gradual das aulas na semana dos dias 16 a 20 de março, foi pedido para que os alunos que tivessem condição ficassem em casa, diminuindo assim as chances de contágio do Covid-19. Foi possível notar que a maioria dos alunos, até 18 de março, conseguiram aderir ao distanciamento social.

Foi compartilhado por meio das mídias das escolas a Página 18 da Executivo - Caderno 1 do Diário Oficial do Estado de São Paulo (DOSP) de 19 de março de 2020, que entre outras informações, apontou sobre a importância do afastamento social e como ele deveria acontecer, levando em consideração as medidas de proteção a serem seguidas e como as atividades deveriam ser realizadas para o aprendizado dos alunos. A partir do dia 23 de março houve a suspensão total das aulas.

3 CMSP- Centro de Mídias da Educação de São Paulo

O bloco “o que é o centro de mídias da educação de São Paulo” explica que o CMSP é uma iniciativa da Secretaria da Educação de São Paulo que tem como objetivo contribuir para a formação dos profissionais da rede e ampliar a oferta de uma educação mediada por tecnologia aos alunos de uma forma que seja alinhada com o século XXI e inovadora.

Ainda é possível ler que por conta do período que a sociedade passa atualmente, de distanciamento social devido a Covid 19, com as aulas presenciais suspensas, o CMSP vem ao encontro para apoiar os professores e alunos nessa conexão.

3.1 Sobre o CMSP

Para que as aulas fossem ministradas, criaram o Aplicativo Centro de Mídias SP, em que há interação contínua entre professores do CMSP com os alunos da rede estadual de São Paulo, formação para os professores da rede, treinamentos, local para a gestão das

escolas entre outras finalidades.



Fonte: Visualização do aplicativo por meio da Play Store.

Segundo o site da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo “A internet utilizada durante o uso do aplicativo é custeada pela própria Seduc e não será descontada dos usuários”, ou seja, todo acesso e por tempo ilimitado ao aplicativo do Centro de Mídias SP não tem custo para os usuários, assim os alunos que não têm acesso à internet, por meio de dispositivos móveis e internet móveis conseguem ter acesso ao aplicativo.

O Centro de Mídias de São Paulo utiliza diversas redes sociais como o Facebook – mostrado a seguir-, Instagram, Twitter, além de ter conta no Youtube que é uma plataforma de compartilhamento de vídeos e por meio de alguns canais da TV. Em todos os vídeos e compartilhamentos, os responsáveis estão à disposição dos usuários, tiram dúvidas e explicam quaisquer problemas que surgem no decorrer do uso do app.



Fonte: Página oficial do CMSP no Facebook.

No site, quando clicado no menu – canto superior direito – entre todas as abas que aparecem, há a aba chamada “Perguntas e Respostas” nela é possível encontrar um documento com 67 perguntas e respostas que têm o objetivo de auxiliar os alunos e professores que utilizam a plataforma, como é possível fazer download do documento, os usuários conseguem se necessário acessá-lo sem internet.



Fonte: Plataforma CMSP.

Entre as perguntas está uma que interroga o que é o aplicativo, em resposta é possível ler que foi um app criado

para auxiliar no processo de ensino aprendizagem por meio de tecnologias, fazendo com que fosse possível assistir e participar das aulas e que o conteúdo passado nele também é apresentado pela TV.

Outra pergunta foi sobre quantos alunos podem acessar o CMSP simultaneamente, em resposta é possível ler que a ferramenta pode ser acessada por até 400 mil alunos e que pretendem posteriormente aumentar esse número para 1 milhão.

Podemos extrair das respostas que o aplicativo está disponível para Android e iOS e que ele oferece diferentes canais de transmissão por séries, canais de treinamento para gestores e professores e espaços em que os professores conseguem se comunicar por meio de texto e vídeo com os alunos, entre outras informações.

Por meio da plataforma do Centro de Mídias São Paulo é possível ter acesso aos dias e horários, referente aos anos e séries, que as aulas são apresentadas no aplicativo e na TV. Abaixo é possível encontrar a tabela com essas informações.

GRUPOS/CANAIS	APP CMSP	TV EDUCAÇÃO
6º Ano Ensino Fundamental	Seg. a Sexta 07h00 – 09h45	Seg. a Sexta 07h30 – 09h00
REPRISE	14h00 – 16h15	
7º Ano Ensino Fundamental	Seg. a Sexta 09h00 – 11h15	Seg. a Sexta 09h00 – 10h30
REPRISE	14h45 – 17h00	
8º Ano Ensino Fundamental	Seg. a Sexta 09h45 – 12h00	Seg. a Sexta 10h30 – 12h00
REPRISE	15h30 – 17h45	
9º Ano Ensino Fundamental	Seg. a Sexta 14h00 – 16h15	Seg. a Sexta 14h00 – 15h30
REPRISE	09h45 – 12h00	
1ª Série Ensino Médio	Seg. a Sexta 14h45 – 17h00	Seg. a Sexta 15h30 – 17h00
REPRISE	07h30 – 09h45	
2ª Série Ensino Médio	Seg. a Sexta 17h00 – 19h15	Seg. a Sexta 17h00 – 18h30
REPRISE	09h15 – 10h30	
3ª Série Ensino Médio	Seg. a Sexta 17h45 – 20h00	Seg. a Sexta 18h30 – 20h00
REPRISE	09h00 – 11h15	
EJA – Ensino Fundamental	Seg. a Sexta 19h00 – 21h30	Ter. e Qui. 20h00 – 21h30
EJA – Ensino Médio	Seg. a Sexta 19h30 – 21h30	Seg., Qua. e Sex. 20h00 – 21h30

Fonte: Plataforma do site CMSP 2020.

3.3 Bob

Segundo Lucchesi e Silva et.al (2020) “Chatbots são agentes de conversação, ou melhor, aplicativos inteligentes que simulam a conversação como se fossem seres humanos”. São softwares desenvolvidos com o objetivo de sanar dúvidas frequentes para diversos assuntos.

É a inteligência artificial que trabalha em um chat, com forma de um diálogo pré-definido entre o programa de computador e o usuário. É possível ver esses assistentes virtuais em diversos sites e plataformas, por meio da criatividade as empresas desenvolvem animações para que eles tenham rostos e que os usuários se sintam acolhidos.

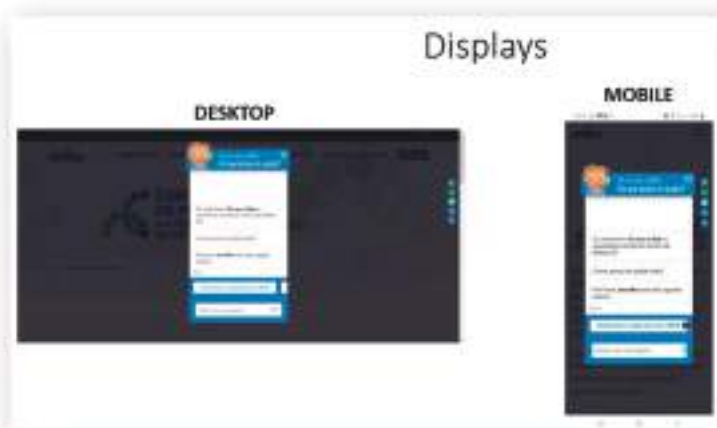
Bot, abreviação de robot, são softwares desenvolvidos para imitar ações humanas, repetidas vezes, e simular uma interação humano-computador. Os primeiros bots eram mais simples e com pouca interação. Atualmente, eles fazem uma análise prévia de necessidades do usuário para auxiliá-lo com uma interação de forma mais natural possível (CARVALHO E CARVALHO, 2020, p. 72).

Bob é o assistente virtual da plataforma Centro de Mídias SP, é possível ter acesso a ele logo na página inicial. À seguir será mostrado como fica o display de um desktop quando a plataforma CMSP é acessada, fazendo com que no centro da tela, no botão azul “Tire suas dúvidas com Bob!” seja possível clicar, abrir o chat e iniciar um bate papo com o Bob, pois o botão tem o chat fixado na parte central da tela que segue a rolagem da página.



Fonte: Plataforma CMSP

É possível acessar o site também por meio de mobiles, com a diferença de que nos desktops somente é possível passar as dúvidas prontas clicando nas setas, por meio dos mobiles é possível com o Touch screen apenas passar as dúvidas para o lado que desejar, podendo assim escolher às questões que poderão melhor responder à cada usuário, à seguir serão mostrados os displays de um desktop e de um mobile.



Fonte: Plataforma CMSP.

Quando alguma pergunta não programada é feita, as respostas que pode-se obter por meio do diálogo com Bob são: “Sorry, I didn’t understand”, “Por favor, escolha uma das opções abaixo:”, “infelizmente, esta opção ainda não está disponível. Esperamos oferecê-la muito em breve” e “Posso te ajudar em algo mais?”.

É possível perceber uma grande evolução, pois segundo Júnior e Carvalho “Os primeiros bots eram mais simples e com pouca interação. Atualmente, eles fazem uma análise prévia de necessidades do usuário para auxiliá-lo com uma interação de forma mais natural possível”.

4 Aprender sempre: apostila que complementa, retoma e reforça

Como dito anteriormente, as aulas são transmitidas por algumas mídias sociais e ficam disponibilizadas para o acesso do público no Youtube, além das aulas foram disponibilizados e enviados para as escolas alguns materiais complementares e aqueles que já eram de costume.

As apostilas “Aprender Sempre” foram enviadas para as escolas nas áreas de Português e Matemática para auxiliar os professores na inclusão das competências socioemocionais bem como é explicado na introdução das apostilas do professor:

Diversas pesquisas na área da Psicologia e Educação, já sinalizam a relação de simbiose no desenvolvimento de competências socioemocionais e cognitivas, e por isso a importância de sua articulação no ambiente escolar para a formação integral dos educandos. Partindo dessa premissa, o objetivo da proposta aqui apresentada é contribuir para a integração dos processos de aprendizagem das habilidades curriculares, apoiando o docente na reflexão para o planejamento do aspecto socioemocional em suas aulas. A partir dessa perspectiva - considerando a urgência em expandir nossos olhares

para a integração de competências cognitivas e socioemocionais na recuperação de aprendizagens - o conjunto das sequências de atividades aqui descritas oferece um suporte adicional aos estudantes para promover as aprendizagens essenciais ao percurso educacional. Ao longo dos bimestres, essas aprendizagens serão desenvolvidas - com apoio do Centro de Mídias - em suas aulas e pelas demais atividades escolares não presenciais (APRENDER SEMPRE, p.3, 2020).

Este material foi preparado para servir de apoio tanto aos estudantes quanto aos professores neste momento de pandemia, é dividido em duas partes, português e matemática e conta ainda com atividades que têm o objetivo de ampliar os conhecimentos, aprender mais sobre a COVID 19 e a criação de uma rotina de estudos.

Em 2020 a apostila Aprender Sempre teve o intuito de fazer uma revisão dos anos anteriores, por exemplo, a apostila do terceiro ano do Ensino Médio traz conteúdos de todos os anos no Ensino Fundamental e do primeiro e segundo ano do Ensino Médio. Como se pode encontrar na capa dessas “o objetivo é garantir que você continue aprendendo”.

No ano de 2021 essa apostila veio para ajudar na retomada das habilidades essenciais que os alunos deveriam ter adquirido no ano anterior e que talvez pela modalidade a distância tivessem algumas dificuldades. Deverá ser trabalhada no primeiro bimestre a apostila para que ajude os alunos a relembrar e aprender as habilidades essenciais do ano anterior.

5 Considerações finais

A Pandemia COVID-19 trouxe inúmeras mudanças, desde o interior das casas das pessoas até estabelecimentos privados e repartições públicas. Tirou o que era a maior liberdade das pessoas, respirar livremente. Mas, com todas as mudanças e perdas que

fora e são presenciadas neste momento, o mundo precisou mudar, não por escolha, mas por necessidade.

Como escrito no início deste artigo, foi apresentada uma revisão sobre a Covid-19 que se deu por meio de uma cronologia dos acontecimentos, descrevendo desde o início da doença, como se alastrou pelo mundo, seguido de sua chegada ao Brasil.

A partir desta apresentação do início da pandemia, os fatos que se seguiram foram os dos atos tomados pela secretaria do Estado de São Paulo com a implementação do uso do Centro de Mídias São Paulo. Este trabalho explicou o que é o CMSP, apresentou quais são as perguntas e respostas que as pessoas mais procuram sobre ele, explicou o que é Bob e quais suas funções e ainda mostrou como são os displays – desktop e mobile – quando estão acessados no site do CMSP.

E por último, mas não menos importante, apresentou o Aprender Sempre, material impresso e entregue pelas escolas criado pela secretaria do estado de São Paulo para auxiliar aos alunos no estudo remoto e assim dar suporte e promover as aprendizagens.

Como citado anteriormente, este artigo objetivou contribuir com pesquisas futuras, que foquem na trajetória da Pandemia COVID-19 e como a educação do Estado de São Paulo se adaptou.

Referências

ALBUQUERQUE, Peter de. A chegada do Covid no Brasil. Disponível em: <<https://www.med.puc-rio.br/notcias/2020/3/27/a-chegada-do-covid-no-brasil>>. Acesso em: 23 de novembro de 2020.

APRENDER SEMPRE. Disponível em: <<https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wpcontent/uploads/sites/7/2021/01/Orientac%C3%A7%C3%83es%20para%20CSE%20com%20Aprender%20Sempre%20Volume%201%20-%20Matema%C3%81tica.pdf>>. Acesso em 27 de janeiro de 2021.

CADERNO 1 DO DIÁRIO OFICIAL DO ESTADO DE SÃO PAULO (DOSP). Jusbrasil: Disponível em: <<https://www.jusbrasil.com.br/>>

diarios/288230064/dosp-executivo-caderno-1-19-03-2020-pg-18>. Acesso em 23 de novembro de 2020.

CARVALHO JÚNIOR, Ciro Ferreira de; CARVALHO Rejane Souza dos Anjos de. Chatbot: uma visão geral sobre aplicações inteligentes. In: Revista Sítio Novo. Disponível em: <<https://sitionovo.iftto.edu.br/index.php/sitionovo/article/view/140>>. Acesso em 15 de dezembro de 2020.

CENTRO DE MÍDIAS DA EDUCAÇÃO DE SÃO PAULO. Disponível em: <<https://centrodemidiasp.educacao.sp.gov.br/>>. Acesso em 15 de dezembro de 2020.

CENTRO DE MÍDIAS DA EDUCAÇÃO DE SÃO PAULO - PERGUNTAS E RESPOSTAS. Disponível em: <<https://centrodemidiasp.educacao.sp.gov.br/downloads/cmssp-perguntas-e-respostas.pdf>>. Acesso em 15 de dezembro de 2020.

CORONAVÍRUS: como o mundo desperdiçou a chance de produzir vacina para conter a pandemia. Disponível em: <<https://www.uol.com.br/vivabem/noticias/bbc/2020/04/10/coronavirus-como-o-mundo-desperdicou-a-chance-de-produzir-vacina-para-conter-a-pandemia.htm>>. Acesso em 09 de novembro de 2020.

LUCCHESI, Iavana Lima; SILVA, Anita Raquel da; et al. Avaliação de um chatbot no contexto educacional: um relato de experiências com metis. In: Revista Renote – Novas Tecnologias na Educação. Disponível em: <<https://www.seer.ufrgs.br/renote/article/view/85903/49294>>. Acesso em 15 de dezembro de 2020.

MINISTÉRIO DA SAÚDE. Disponível em: <<https://coronavirus.saude.gov.br/linha-do-tempo/>>. Acesso em 09 de Novembro de 2020.

MINISTÉRIO DA SAÚDE. Disponível em: <<https://coronavirus.saude.gov.br/sobre-a-doenca>>. Acesso em: 09 de Novembro de 2020.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO. Disponível em: <<https://www.educacao.sp.gov.br/aprenda-acessar-o-aplicativo-centro-de-midias-sp>>. Acesso em 15 de dezembro de 2020.

VARGAS, Mateus; LINDNER, Julia. Primeiro caso da Covid-19 no Brasil é do fim de janeiro, diz o Ministério da Saúde. Disponível em: <<https://saude.estadao.com.br/noticias/geral,primeiro-caso-da-covid-19-no-brasil-e-do-fim-de-janeiro-diz-ministerio-da-saude,70003258394>>. Acesso em: 23 novembro de 2020.

TEORIA DOS NÚMEROS E CRIPTOGRAFIA

Allyson da Silva Garcia
Licenciado em Matemática – Uni-FACEF

Prof^a. Ms. Letícia Faleiros Chaves Rodrigues
Mestre em Matemática Universitária docente do Uni-FACEF
leticia@facef.br

1 Introdução

A palavra criptografia vem de criptos, que em grego significa escondido, oculto, combinada com grafia, ou escrita. Ou seja, a criptografia, consiste em ocultar mensagens por meio de técnicas e chaves. Desta forma, uma informação não-cifrada que é enviada de uma pessoa (ou organização) para outra é chamada de “texto claro”. Cifragem é o processo de conversão de um texto claro para um código cifrado e decifragem é o processo contrário, de recuperar o texto original de um texto cifrado.

A criptografia é tão antiga quanto a escrita, ela vem sendo desenvolvida a milhares de anos, no começo usando caneta e papel, chamada de criptografia clássica. Mas com o passar do tempo e com o avanço da tecnologia, criando máquinas mecânicas e eletromecânicas, puderam desenvolver criptografias ainda mais complexas, como no século XX que foi criada a máquina de rotores enigma, que foi um ponto chave para o avanço da criptografia. Essa máquina servia tanto para criptografar quanto para descryptografar enigmas, usada na Europa durante a guerra, pelos alemães, ficou famosa por sua fama de ser fácil de se usar e sua indecifrabilidade, mas como sabemos Alan Turing conseguiu quebrar o código e desvendar as mensagens dos alemães, e esse feito é geralmente tido como o que ocasionou o fim da segunda guerra mundial.

Essa máquina contava com 5 (cinco) rotores, mas só 3 (três) eram utilizados, os alemães escolhiam quais rotores seriam utilizados mensalmente, além disso esses rotores contavam com

26 anéis, e para descriptografar as mensagens, precisavam saber quais as posições possíveis desses 26 anéis. O operador ainda precisava saber a posição inicial de três posições, no fim temos o total de seis setilhões de códigos possíveis.

A matemática aplica-se em diversas áreas, inclusive na criptografia. Assim o trabalho visa, revisar conceitos da Teoria dos Números e aplicá-los na criptografia. Desta forma, no segundo capítulo, serão abordados alguns conceitos da matemática, como divisibilidade, congruência, números primos, dentre outros.

No Terceiro capítulo, será apresentada a cifra de transposição, esta que altera uma letra ou símbolo para outra que esteja em sua frase ou texto, de uma forma linear e repetida.

Em seguida, no quarto capítulo, falaremos da cifra de substituição, onde as letras de seu texto ou frase sofrem uma rotação que o próprio cifrador estipula, tanto para se criptografar e descriptografar.

E por fim, no quinto capítulo, mostraremos outro método de criptografia, amplamente utilizado na transmissão segura de dados. A criptografia RSA é baseada na dificuldade prática da fatoração do produto de dois números primos.

2 Teoria dos números

A origem da teoria dos números propriamente dita tem sido atribuída aos gregos, Pitágoras e seus discípulos foram os primeiros a classificar os números inteiros, como, pares, ímpares, primos, compostos entre outros. Para o estudo sobre criptografia, será necessária a compreensão de congruência Linear, divisibilidade, números primos, entre outros conceitos dentro da Teoria dos Números que será descrito a seguir.

2.1 Divisibilidade

Definição 1: Na divisibilidade dois números se dividem quando um número inteiro qualquer é igual a multiplicação de outros dois números inteiros quaisquer, dessa forma se “a” e “b” são inteiros, diz que “a” divide “b”, se existir um “c” tal que $b=a \times c$.

Logo se “a”, “b” e “c”, são inteiros, $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

Demonstração 1: Como $a|b$ e $b|c$ existem inteiros “ x_1 ” e “ x_2 ” com $b = x_1 \times a$ e $c = x_2 \times b$. Substituindo o valor de b na equação $c = x_2 \times b$ teremos $c = x_2 \times x_1 \times a$, pois $b = x_1 \times a$, logo de dividir tudo por c, teremos $\frac{c}{c} = \frac{x_2 \times x_1 \times a}{c}$, então implica que $a|c$.

Exemplo 1: Como $5|25$ e $25|50$, então $5|50$.

Proposição 1: Se a, b, c, m e n são inteiros, $c|a$ e $c|b$ então $c|(m_a + n_b)$.

Teorema 1: A divisão tem as seguintes propriedades:

$$(1) \quad n|n$$

$$(2) \quad d|n \rightarrow ad|an$$

$$(3) \quad ad|an \text{ e } a \neq 0 \rightarrow d|n$$

$$(4) \quad 1|n$$

$$(5) \quad n|0$$

$$(6) \quad d|n \text{ e } n \neq 0 \rightarrow |d| \leq |n|$$

$$(7) \quad d|n \text{ e } n|d \rightarrow |d| = |n|$$

$$(8) \quad d|n \text{ e } d \neq 0 \rightarrow \frac{n|d}{n}$$

ALGORITMO DA DIVISÃO

Dado dois números inteiros “a” e “b”, com $b > 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que:

$$a = qb + r, \text{ com } 0 \leq r < b \quad (r = 0 \Leftrightarrow b/a)$$

Q é chamado de quociente e r de resto, na divisão do inteiro “a” pelo inteiro “b”.

MÁXIMO DIVISOR COMUM

O máximo divisor comum de dois inteiros a e b (a ou b diferente de zero), denotado por (a, b) , é o maior inteiro que divide “a” e “b”.

Teorema 2: Seja d o máximo divisor comum de a e b, então existem inteiros “ n_0 ” e “ m_0 ” tais que $d = n_0 a + m_0 b$.

Teorema 3: Teorema fundamental da aritmética. Todo inteiro maior que 1 pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos, ou seja,

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_r^{a_r}$$

Onde cada p_i é um número primo e $a_i > 0$.

Definição: Dois naturais m e n dizem-se primos entre si se $\text{mdc}(m, n) = 1$ (diz-se também que m é coprimo de n).

Para dividir um número composto em seus primos, começa dividindo-o pelo menor primo possível, e assim sucessivamente, sempre em ordem crescente. Por exemplo, 56 e 45 fatorado (dividido em seus números primos) ficariam assim:

$$\frac{56}{2} = 28$$

$$\frac{28}{2} \times 2 = 14 \times 2$$

$$56 = 2^3 \times 7$$

Como 23 e 2 são números primos a fatoração termina, então os números primos que dividem o 56 são os números (23,2).

Já para o número 45

$$\frac{45}{3} = 15$$

$$\frac{15}{3} = 5$$

$$\frac{5}{5} = 1$$

Logo:

$$45 = 15 \times 3$$

$$15 = 5 \times 3$$

$$5 = 1 \times 5$$

Sabendo disso, pode-se trocar o 15 por sua multiplicação em fatores primos para obter todos os primos que dividem 45, então se tem:

$$45 = 5 \times 3 \times 3$$

Portanto, os números primos que dividem o número 45 são (5,3,3).

Apesar de parecer simples, quando se tem números grandes, há uma grande dificuldade para fazer esta fatoração, tornando um processo difícil e demorado.

2.2 Congruência

A congruência é um conceito que nos mostra algo que se coincide ou é correspondente, por exemplo, dois números inteiros são congruentes quando deixam o mesmo resto na divisão por outro número inteiro qualquer, assim dizendo um número inteiro “a” e um número inteiro “b” esses dois números só serão congruentes se deixarem o mesmo resto em uma divisão por um número inteiro “m”, a notação seria; $a \equiv b \pmod{m}$.

Exemplos 2:

$24 \equiv 4 \pmod{10}$ Pois 4 é o resto da divisão de 24 por 10.

$24 \equiv 14 \pmod{10}$ Pois 24 e 14 deixam o mesmo resto na divisão por 10.

$10 \equiv 1 \pmod{9}$ Pois 1 é o resto da divisão de 10 por 9.

Para se resolver alguma congruência que não mostra o divisor pode-se usar uma Função, supondo que se tem, $10 \equiv 2 \pmod{x}$, no qual “x” é um número que divide 10 e tem resto 2, pode-se usar tentativa e erro ou essa anotação.

Sabe-se que o resultado de uma divisão se dá na multiplicação do divisor com o quociente mais o resto e isso será igual ao dividendo. Olhando a congruência sabe-se que o 10 é o dividendo e o 2 é resto, logo a incógnita “x” será divisor, portanto, o quociente será um inteiro qualquer, e ficasse então com a seguinte equação:

$$10 = x \times q + 2$$

Agora somando o inverso aditivo do 2 nos dois lados da equação:

$$10 - 2 = x \times q + 2 - 2$$

Isso resulta na seguinte equação:

$$8 = x \times q$$

Logo os inteiros “x” e “q” tem que ser múltiplos de 8.

Definição 1: Se “a” e “b” são inteiros dizemos que “a” é congruente a “b” módulo $m(m > 0)$ se $m | (a - b)$. Denotamos isto por $a \equiv b \pmod{m}$. Se m não divide $(a - b)$ dizemos que “a” é incongruente a “b” módulo “m” denotamos que $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Exemplo 3: $11 \equiv 3 \pmod{2}$ pois $2 | (11 - 3)$. Como $5 \nmid 6$ e $6 \equiv 17 \pmod{5}$ temos que $17 \not\equiv 11 \pmod{5}$.

Proposição: Se “a” e “b” são inteiros, temos que $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, existir um inteiro k tal que $a = b + km$.

Para congruência se “a”, “b”, “m” e “d” são inteiros, e $m > 0$, as seguintes sentenças são verdadeiras:

$$1. \quad a \equiv a \pmod{m}$$

$$2. \quad \text{Se } a \equiv b \pmod{m}, \text{ então } b \equiv a \pmod{m}$$

$$3. \quad \text{Se } a \equiv b \pmod{m} \text{ e } b \equiv d \pmod{m}, \text{ então } a \equiv d \pmod{m}$$

Se “a”, “b”, “c” e m são inteiros tais que $a \equiv b \pmod{m}$, então.

$$1. \quad a + c \equiv b + c \pmod{m}$$

$$2. \quad a - c \equiv b - c \pmod{m}$$

$$3. \quad ac \equiv bc \pmod{m}$$

Se “a”, “b”, “c”, “d” e “m” são inteiros tais que $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$ então:

$$1. \quad a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

$$2. \quad a - c \equiv b - d \pmod{m}$$

$$3. \quad ac \equiv bd \pmod{m}$$

Exemplo 4:

$$5 \equiv 2 \pmod{3}$$

Pois a divisão de 5 por 3 deixa um resto 2.

Exemplo 5:

$$5 \equiv 7 \pmod{2};$$

Pois 2 é o resto da divisão de 7 por 5.

Exemplo 6:

$$5 \equiv 2 \pmod{3};$$

Pois 2 é o resto da divisão de 5 por 3.

2.3 Congruência linear

Chamamos de congruência Linear em uma variável a uma congruência da forma $ax \equiv b \pmod{m}$ onde x é uma incógnita.

É fácil de verificar que se x_0 é uma solução, isto é, $ax_0 \equiv b \pmod{m}$ e $x_1 \equiv x_0 \pmod{m}$ então x_1 também é solução. Isto é óbvio, pois se $x_1 \equiv x_0 \pmod{m}$ então $ax_1 \equiv ax_0 \equiv b \pmod{m}$.

Uma equação da forma $ax+by=c$, onde “a”, “b”, e “c” são inteiros, é chamada equação diofantina linear. (o nome vem do matemático grego Diofanto).

2.4 Função totiente de Euler

A função totiente de Euler também conhecida de função totiente, ou função phi (φ), na teoria dos números se dá pelo número natural “x” que é relacionada a quantidade de números menores ou igual a x e os co-primos com respeito a ele. Matematicamente:

$$\varphi(x) = \{n \in \mathbb{N} | n \leq x \wedge \text{mdc}(n, x) = 1\}$$

Essa expressão significa que o totiente de x é igual ao conjunto “n” pertencente aos naturais, tal que, “n” seja menor ou igual a “x” e para o mdc (n,x) tem que ser igual a 1. Diz-se que dois números são co-primos quando o único divisor deles é o número 1, ou seja, quando o $\text{mdc}(n, x) = 1$, assim podemos usar a função de Euler para determinar os co-primos.

Por exemplo, $\varphi(10)=4$, pois 1,3,7,9 são co-primos com 10. Um outro exemplo, $\varphi(1)=1$, pois o $\text{mdc}(1,1)=1$.

Teorema 4: Para p primo e “a” um inteiro positivo temos.

$$\varphi(p) = p^a - p^{a-1}$$

Exemplo 7: $\varphi(4) = \varphi(2^2) = 2^2 - 2^1 = 2$, $\varphi(27) = \varphi(3^3) = 3^3 - 3^2 = 18$

Teorema 5: A função φ de Euler é multiplicativa, isto é, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ para $(m,n)=1$.

Teorema 6: Para $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_r^{a_r}$, onde cada p_i é um número primo e $a_i > 0$. Temos,

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Ou

$$\varphi(n) = n(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_r - 1).$$

Esta fórmula, também pode ser escrita como,

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Sendo que este produto varia apenas sobre os primos distintos p que divide n .

Portanto, dados os primos p e q e $n = pq$, facilmente achamos $\varphi(n)$, pois

$$\varphi(n) = \varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q) = (p-1)(q-1)$$

Nos próximos capítulos, veremos três aplicações dos conceitos aqui mencionados dentro da Teoria dos Números no ramo da Criptografia, como a Cifra de César, de Substituição e por fim RSA.

3 Cifra de Transposição

A cifra de transposição consiste em embaralhar as letras, formando uma espécie de anagrama. É um método muito eficaz, pois quando se embaralha letras cria-se um alto nível de segurança, no qual ficará muito difícil de alguém ler a mensagem, mas também dificultará para o receptor da mensagem. Por esse motivo, a forma de embaralhar as letras tem que ser combinada pelo remetente e pelo destinatário, para que os dois possam conseguir se comunicar secretamente sem a intervenção de terceiros.

Logo, a cifra de transposição procede à mudança de cada letra (ou outro qualquer símbolo) no texto a cifrar para outro (sendo a

decifração efetuada simplesmente invertendo o processo). Ou seja, a ordem caracteres é mudada. Matemática trata-se da aplicação de uma função bijetora para cifrar e da respectiva função inversa para decifrar.

A forma mais simples de se usar esse método se chama “cerca de ferrovia”, consiste em escrever a mensagem original em colunas, em seguida, faz-se uma linha imaginária que dividirá a mensagem em duas partes, parte superior e parte inferior, alternando as colunas de ambas as partes, a mensagem será criptografada.

Exemplo 1: A frase “Teoria dos números”

Tabela 1: Cifra de Transposição

T	E	O	R	I	A	D	O	S	N	U	M	E	R	O	S
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Fonte: Próprio autor.

Divide-se a frase que será criptografada em colunas, e conta quantas colunas essa frase proporcionou (que será a quantidade de letras que a frase contém). A frase “Teoria dos números” contém 16 letras, logo se passa uma linha imaginária no meio dividindo a frase em duas partes iguais ambas com 8 letras, a parte superior e a inferior. Logo, tem-se a frase e a posição das letras, conforme a tabela abaixo.

Tabela 2: Numerando a frase “Teoria dos números”

T	E	O	R	I	A	D	O	S	N	U	M	E	R	O	S
1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°

Fonte: Próprio autor

Para criptografar usa-se a seguinte analogia, as letras das extremidades que no caso são o “T” e o “S” que estão respectivamente

na primeira 1° e na última posição 16°, permanecerão nessas posições, já o restante será alterada, chama-se as letras da segunda posição 2° até a oitava posição 8° de parte “A”, e as letras da nona posição 9° até a décima quinta posição 15° de parte “B”. Assim, tomando a primeira letra da parte “A”, que no caso é a letra “E”, o mesmo ocupará a primeira posição da parte “B”, ou seja, a nona posição. Em seguida, a letra da posição seguinte a “E”, que no caso é a letra “O” ocupará a posição de “E”, assim sucessivamente, conforme esquema abaixo,

E (2° posição) → 9ª posição (1ª posição da parte B)
 O (3° posição) → 2ª posição
 R (4° posição) → 10ª posição (2ª posição da parte B)
 I (5° posição) → 3ª posição
 A (6° posição) → 11ª posição (3ª posição da parte B)
 D (7° posição) → 4ª posição
 O (8° posição) → 12ª posição (4ª posição da parte B)
 S (9° posição) → 5ª posição
 N (10° posição) → 13ª posição (5ª posição da parte B)
 U (11° posição) → 6ª posição
 M (12° posição) → 14ª posição (6ª posição da parte B)
 E (13° posição) → 7ª posição
 R (14° posição) → 15ª posição (7ª posição da parte B)
 O (15° posição) → 8ª posição

Os resultados estão na tabela a seguir, com as novas posições.

Tabela 3: Cifragem final

T	O	I	D	S	U	E	O	E	R	A	O	N	M	R	S
1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°

Fonte: Próprio autor

Assim, a frase “TEORIA DOS NUMEROS” criptografada pelo método de transposição “cerca de ferrovia”, seria “TOIDSUEOERAONMRS”.

Agora para descriptografar faz-se o processo inverso que foi feito para criptografar, divide-se novamente em duas colunas diferentes.

Tabela 4: Decifragem

T	O	I	D	S	U	E	O	E	R	A	O	N	M	R	S
1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°

Fonte: Próprio autor

Primeiro pega-se a segunda letra da coluna “A” que ocupará a posição seguinte (terceira posição) e a primeira letra da parte “B” ocupará a segunda posição, depois a terceira letra da parte “A” ocupará a quinta posição e a segunda letra da parte “B” ocupa a terceira posição. Assim sucessivamente. Dessa forma:

- 2º posição ← “E” 9ª posição (1ª posição da parte B)
- 3º posição ← “O” 2ª posição
- 4º posição ← “R” 10ª posição (2ª posição da parte B)
- 5º posição ← “I” 3ª posição
- 6º posição ← “A” 11ª posição (3ª posição da parte B)
- 7º posição ← “D” 4ª posição
- 8º posição ← “O” 12ª posição (4ª posição da parte B)
- 9º posição ← “S” 5ª posição
- 10º posição ← “N” 13ª posição (5ª posição da parte B)
- 11º posição ← “U” 6ª posição
- 12º posição ← “M” 14ª posição (6ª posição da parte B)
- 13º posição ← “E” 7ª posição
- 14º posição ← “R” 15ª posição (7ª posição da parte B)
- 15º posição ← “O” 8ª posição

As posições 1 e 16 continuaram iguais pois foram permanecidas nas posições quando a frase foi decifrada. Logo volta-se a ter a frase descryptografada “TEORIA DOS NUMEROS”.

Matematicamente percebe-se que para cifrar, as letras que ocupavam as posições pares, foi adicionado 16 (que é o total de letras da frase) e em seguida dividido por 2. Já as letras que ocupavam as posições ímpares, soma-se 1 e divide por 2. Assim, a função para cifrar as letras da palavra “Teoria dos números”, seria,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+16}{2}, & x \text{ par} \\ \frac{x+1}{2}, & x \text{ ímpar} \end{cases}$$

Ou seja, a letra “E” que está na segunda posição ocupará a posição 9, pois $f(2) = \frac{2+16}{2} = 9$, e assim por diante $f(3) = \frac{3+1}{2} = 2$, $f(4) = \frac{4+16}{2} = 10$, ...

E para decifrar, usamos a função inversa,

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 8 \\ 2x-16, & x > 8 \end{cases}$$

Ou seja, a letra “O” está na segunda posição, assim ocupará a 3ª posição, pois $f(2)=2 \cdot 2-1=3$, e assim sucessivamente.

Vimos como usar a cifra de transposição para criptografar e descryptografar uma frase cuja quantidade de letras é par, veremos a seguir o caso quando a quantidade de letras for ímpar, onde o procedimento é análogo, mas a parte superior terá uma letra a mais que a parte inferior.

Exemplo 2: A frase “EU AMO MATEMATICA”

Se contar a quantidade de letras verá que esta frase tem 15 letras, portanto uma quantidade ímpar de letras. Logo, ao montar as partes com as letras da frase teremos

Tabela 5: Transposição com quantidade ímpar

E	U	A	M	O	M	A	T	E	M	A	T	I	C	A
1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°

Fonte: Próprio autor

Dividindo em duas partes, parte “A” e “B”, a parte superior será a parte “A”, como já dito a mesma ficará com uma coluna a mais que a outra, então a parte “A” terá 8 letras e a parte “B” 7. Ficando dessa forma:

Tabela 6: Dividindo em coluna

E	U	A	M	O	M	A	T	E	M	A	T	I	C	A
1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°

Fonte: Próprio autor

Agora é só usar a mesma analogia que foi utilizada na criptografia de uma frase com número par de letras (trocando as letras da coluna “A” para a

“B” e da coluna “B” para a “A”) mas como é uma quantidade ímpar de letras, deve-se lembrar que a última posição também mudará de lugar e a primeira posição da parte A, permanecerá fixa, alternando as demais. Assim, temos a frase cifrada na seguinte tabela.

Tabela 7: Cifragem com quantidade ímpar

E	A	O	A	E	A	I	A	U	M	M	T	M	T	C
1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°

Fonte: Próprio autor

A frase “EU AMO MATEMATICA” criptografada se tornaria

“EAOEAI AUMMTMC”.

O processo de decifragem é o inverso da cifragem, divide novamente em parte “A” e parte “B”, no qual a parte “A” será a parte superior, então terá uma letra a mais que a parte inferior, e em seguida traz-se de volta as letras para seus devidos lugares, conforme esquema abaixo. Sendo que a única letra que permanecerá em sua posição será a primeira. Assim,

- Letra da Posição 9 → 2ª
- Letra da Posição 2 → 3ª
- Letra da Posição 10 → 4ª
- Letra da posição 3 → 5ª
- Letra da posição 11 → 6ª
- Letra da posição 5 → 7ª
- Letra da posição 4 → 8ª
- Letra da posição 12 → 9ª
- Letra da posição 13 → 10ª
- Letra da posição 6 → 11ª
- Letra da posição 14 → 12ª
- Letra da posição 7 → 13ª
- Letra da posição 15 → 14ª
- Letra da posição 8 → 15ª

Dessa forma consegue-se a decifragem da frase e retorna-se a frase original “EU AMO MATEMATICA”.

4 Cifra de César

Conta a história que Júlio César imperador romano, usava uma cifra para mandar mensagens codificadas para seus generais, a fim de impedir que estas mensagens fossem lidas por qualquer inimigo que a conseguisse interceptar.

Ele e seus generais tinham um acordo de trocarem cada

letra redigida pela letra que estivesse 3 vezes à frente, e para cada espaço entre as palavras, se colocava um símbolo representando onde começaria a outra.

Exemplo:

Tabela 8: Cifra de César

I	M	P	E	R	A	D	O	R	R	O	M	A	N	O
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Fonte: Próprio autor

Para codificar-se a frase “Imperador Romano” pela cifra de César, usamos o alfabeto:

A; B; C; D; E; F; G; H; I; J; K; L; M; N; O; P; Q; R; S; T; U; V; W; X; Y; Z

Desta forma, para cada letra contida na frase, troca-se pela letra que está 3 “três” vezes à frente, mas deve-se levar em consideração que a rotação de 3 letras a frente é um exemplo e pode-se usar diferentes quantidades de rotação. Têm-se que a primeira letra da palavra imperador é o ‘I’.

A; B; C; D; E; F; G; H; I; J; K; L; M; N; O; P; Q; R; S; T; U; V; W; X; Y; Z.

Percebe-se que a letra que está 3 casas a frente do “I” é a letra “L”. Logo troca-se a letra “I” pela letra “L”, a “M” por “P” e assim sucessivamente, até que se tenha codificado toda a frase.

Tabela 9: Codificada com Cifra de César

L	P	S	H	U	D	G	R	U	#	U	R	P	D	Q	R
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Fonte: Próprio autor.

Então, a frase “IMPERADOR ROMANO” codificada pela cifra de César ficará dessa forma “LPSHUDGRU#URPDQR”, sendo que para demonstrar o espaço entre as palavras foi usado o

símbolo “#”.

Desta forma, sabe-se que a cifra de César consiste em deslocar n casas à direita, neste exemplo adotou-se $n=3$, mas pode-se escolher qualquer valor para n , e como o alfabeto contém 26 letras. Será trabalhado com congruência módulo 26. Ou seja, se tomasse $n=28$, equivale a usar $n=2$, que seria trocar a letra do alfabeto por duas letras à direita, pois tem-se $28 \equiv 2 \pmod{26}$. Tomando, então, $n=3$, tem-se a seguinte relação para codificar:

Tabela 10: Letras com rotação $n=3$

LETRA	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
CIFRA	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P

Fonte: Próprio autor

Tabela 11: Letras com rotação $n=3$

LETRA	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
CIFRA	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Fonte: Próprio autor

Por exemplo, a palavra UNI-FACEF codificada, seria:

XQL-IDFHI

Para decifrar um texto, basta olhar a letra na linha da cifra e depois o correspondente na linha superior. Ou ainda, trocando a linha superior pela inferior da tabela anterior, e organizando em ordem alfabética novamente, tem-se a seguinte tabela para decifrar:

Tabela 12: Continuação com rotação $n=3$

CIFRA	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
LETRA	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

Fonte: Próprio autor

Tabela 13: Continuação com rotação $n=3$

LETRA	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
CIFRA	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W

Fonte: Próprio autor

Pode-se perceber, ao analisar esta última tabela, que a parte inferior está deslocada em 23 posições com relação à superior. Ou seja, quando se cifra a mensagem usa-se $n = 3$, e para decifrá-la usa-se $n = 23$. Vê-se facilmente que a soma é 26, que é o número de letras do alfabeto. Pode-se dizer então que para cifrar, desloca-se o alfabeto em n casas, e para decifrar, desloca-se o alfabeto em $26 - n$ casas.

Agora, matematicamente vê-se como ocorre a Cifra de César. Primeiramente, a cada letra associa-se um número, chama-se esta sequência de números de código numérico associado ao texto original. O processo de mudança de letras para números é chamado codificação, assim como a mudança de número para letras é a decodificação.

Tabela 14: Numeração das Letras

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Fonte: Próprio autor

Tabela 15: Numeração das letras

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Fonte: Próprio autor

Cada letra está associada à sua posição no alfabeto. Assim, a Letra A está associada ao 1, a letra B ao 2 e assim por diante. Logo, a codificação da palavra UNI-FACEF ficaria então da seguinte forma:

Tabela 16: Números que representam as letras

U	N	I	-	F	A	C	E	F
21	14	9	-	6	1	3	5	6

Fonte: Próprio autor

Para cifrar a palavra UNI-FACEF, usa-se $b = 3$ (sempre é bom lembrar que não é regra usar a rotação como 3, pode-se usar qualquer outra quantidade de rotação), ou seja, adiciona-se 3 unidades a cada número, e logo depois, transformam-se os números em letras, tem-se:

Tabela 17: Codificando

24	17	12	-	9	4	6	8	9
X	Q	L	-	I	D	F	H	I

Fonte: Próprio autor

Logo, a cifra de UNI-FACEF, seria XQL-IDFHI. Para decodificar, usa-se o mesmo processo, lembrando que para decifrar,

a fórmula será $26-b$ casas, e teria novamente a palavra Uni-FACEF.

Considere, por exemplo, a palavra cifrada VIYHZ, considerando $b=7$. Ou seja, ela foi cifrada, com um deslocamento de 7 casas e para decifrar, precisa-se adicionar $26-b=26-7=19$ aos números correspondentes da palavra VIYVB. Primeiramente tem-se,

$$\mathbf{VIYVB \leftrightarrow 22\ 9\ 25\ 8\ 26}$$

Adicionando 19 unidades a cada número, obtém-se,

$$\mathbf{41\ 28\ 44\ 27\ 45}$$

Repare que não se tem uma letra correspondente para os números 41, 28 e 44. Mas, sabe-se que

$$\mathbf{41 \equiv 15 \pmod{26}}$$

$$\mathbf{28 \equiv 2 \pmod{26}}$$

$$\mathbf{44 \equiv 18 \pmod{26}}$$

$$\mathbf{27 \equiv 1 \pmod{26}}$$

$$\mathbf{45 \equiv 19 \pmod{26}}$$

Logo, tem-se:

$$\mathbf{15\ 2\ 18\ 1\ 19}$$

Que correspondem as letras

$$\mathbf{O\ B\ R\ A\ S}$$

Conclui-se então, que a palavra VIYHZ é a palavra OBRAS cifrada.

Note que, adiciona-se 19 unidades a cada número, mas pode-se subtrair 7 números, pois $19 \equiv -7 \pmod{26}$, e assim também ia se ter:

$$\mathbf{VIYVB \leftrightarrow 22\ 9\ 25\ 8\ 26 \leftrightarrow 15\ 2\ 18\ 1\ 19}$$

Generalizando estes resultados, considerando a tabela de letras numeradas, onde tem-se que $A=1$, $B=2$, e assim por diante até $Z=26$, totalizando 26 letras. Quando se cifra um texto original com um deslocamento de n casas, tem-se:

$$\mathbf{C \equiv (x+n) \pmod{26}}$$

Onde, x representa o código numérico do texto original, C o código numérico do texto cifrado e n o número de casas

deslocadas, com $1 \leq n \leq 25$.

Analogamente, para decifrar, tem-se que encontrar o código correspondente a x , assim obtém-se:

$$C \equiv (x+n) \bmod (26) \leftrightarrow (x+n) \equiv C \bmod (26)$$

Ou seja,

$$x \equiv (C-n) \bmod 26 \leftrightarrow x \equiv C+(26-n) \bmod (26).$$

Logo, pode-se perceber que para decifrar, basta subtrair n casas ou adicionar $(26-n)$ casas.

Exemplo 8: Codificando a seguinte frase “EU QUERO FORMAR”, usando $n=9$, temos

Tabela 18: Exemplo Codificação

LETRAS	CÓD	Cod+	Soma	Resto div	Resultado	Posição
	X	chave			C	
E	5	5+9=	14	$14 \bmod (26)$	14	W
U	21	21+9=	30	$30 \bmod (26)$	4	D
#	#	#	#	#	#	#
Q	17	17+9=	26	$26 \bmod (26)$	26	Z
U	21	21+9=	30	$30 \bmod (26)$	4	D
E	5	5+9=	14	$14 \bmod (26)$	14	W
R	18	18+9=	27	$27 \bmod (26)$	1	A
O	15	15+9=	24	$24 \bmod (26)$	24	X
#	#	#	#	#	#	#
F	6	6+9=	15	$15 \bmod (26)$	15	O
O	15	15+9=	24	$24 \bmod (26)$	24	X
R	18	18+9=	27	$27 \bmod (26)$	1	A
M	13	13+9=	22	$22 \bmod (26)$	22	V

A	1	$1+9=$	10	$10 \bmod(26)$	10	J
R	18	$18+9=$	27	$27 \bmod(26)$	1	A

Fonte: Próprio autor

Assim, a frase “EU QUERO FORMAR”, cifrada é WD ZDWAX OXAVJA.

A cifra de César é uma cifra fácil, é bem simples de ser decodificada nos dias de hoje, podendo usar a força bruta, que seria a contagem letra por letra, caso saiba-se que se trata de uma cifra de César e também se saiba a quantidade de rotação de cada letra.

5 Criptografia RSA

A criptografia RSA é um dos primeiros sistemas de criptografia de chave pública, e é usada para transmissão segura de dado. O nome RSA vem das iniciais de seus criadores (Rivest-Chamir-Adlem), os três ganharam o prêmio Turing de 2002 graças ao algoritmo RSA, o qual, um dos mais conhecidos, seguros e utilizados métodos de criptografia, especialmente em transações bancárias e comerciais.

O método RSA usa duas chaves, uma pública e outra privada, a primeira chave respectivamente, qualquer pessoa pode sabê-la, qualquer pessoa poderá utilizá-la para codificar qualquer mensagem. A outra chave só uma pessoa terá, logo só ela conseguirá decifrar qualquer código criptografado com a chave pública.

Por exemplo, se deseja entregar uma mensagem criptografada pelo método RSA para alguém, basta entregar a chave privada da codificação para esta pessoa, que qualquer mensagem criptografada pela chave pública correspondente, ela

consequira decifrar.

Para poder utilizar a criptografia RSA, precisamos de dois parâmetros: dois números primos, que chamaremos de p e q . Para codificar uma mensagem, precisamos conhecer o produto de p e q , que chamamos de x . Para decodificar uma mensagem, precisamos conhecer p e q . Se o número primo escolhido for suficientemente grande, aumenta a dificuldade para decifrar a criptografia RSA. Assim, a criptografia RSA é uma das mais seguras.

5.1 Pré-codificação

Vimos que na criptografia de substituição e transposição começa-se criando uma tabela numerando as letras do alfabeto, na criptografia RSA diferentemente das outras, o começo será numerado não pelo número 1 como de costume, mas sim pelo número 10, logo temos somente números com dois algarismos na tabela, para não se ter ambiguidades, por exemplo:

Tabela 19: Codificando com RSA

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Fonte: Próprio autor

Se a tabela começasse pelo número 1, a letra “A” seria dada pelo número 1 e a letra “B” pelo número 2, portanto se alguma mensagem tivesse as letras AB teria então o número 12, mas a letra “L” também seria dada pelo número 12 como é visto na tabela acima, logo a própria pessoa que iria criptografar ou decifrar se confundiria.

Por conta desse motivo é indicado que a tabela comece pelo número 10 para não ocorrer desacertos na criptografia.

Então a tabela ficaria dessa forma:

Tabela 20: Sem ambiguidades

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35

Fonte: Próprio autor

No texto, substituiremos o espaço entre duas palavras pelo número 99. Por exemplo, a frase “Amo Matemática” é convertida em:

1022249922102914221029181210

A estratégia usada para a escolha dos dois primos que são multiplicados é simples: quanto maior mais eficaz será sua codificação e a sequência numérica formada por alguma palavra, deverá ser quebrada em blocos, de modo que sejam números menores que x.

Os blocos podem ser escolhidos de várias maneiras diferentes, mas alguns cuidados devem ser levados em conta:

1. Os blocos não podem começar com 0;
2. Os blocos em que a mensagem foi quebrada não podem corresponder a nenhuma unidade linguística: palavra, letra ou qualquer outra.

No primeiro caso, evita problemas na hora de decodificar e

no segundo caso, evita a decodificação por contagem de frequência.

Então, tomando os números primos 13 e 17 para a aplicação da RSA, logo $p=13$ e $q=17$. Para determinar a chave pública e privada, multiplicaremos os dois primos, achando um número inteiro “x”.

$$x = p \times q$$

$$x = 13 \times 17$$

$$x = 221$$

O próximo passo é “quebrar” a sequência de números encontrada

Anteriormente em blocos, de modo que eles sejam números menores que x. Por exemplo, se escolhermos $p = 13$ e $q = 17$, então $x = 221$. A mensagem convertida acima pode ser quebrada nos seguintes blocos:

102 – 22 – 49 – 92 – 2 – 10 – 29 – 142 – 210 – 29 – 18 – 12 – 10

5.2 Codificação

Para codificar uma mensagem, vamos precisar de dois inteiros positivos x e e , tais que e seja inversível módulo (n), ou seja, $\text{mdc}(e, x) = 1$, ou seja, x corresponde à quantidade de números naturais entre 0 e $x - 1$, que são primos com x . Além disso, vamos utilizar a função de Euler

$$\varphi(x) = (p-1)(q-1)$$

O par (x, e) será chamado de chave de codificação do sistema RSA.

Seja b , um bloco que queremos codificar. Sabendo que b é um inteiro positivo menor que x . Chamaremos o bloco codificado de $C(b)$, e será calculado da seguinte forma:

$$C(b) = \text{resto da divisão de } b^e \text{ por } x$$

Ou seja, $C(b)$ é a forma reduzida de b^e módulo x .

Assim, se $p=5$ e $q=3$, temos $x=15$, ou seja,

$$\varphi(15) = (5 - 1) \times (3 - 1)$$

$$\varphi(15) = (4) \times (2)$$

$$\varphi(15) = 8$$

Agora, tem que encontrar um número “e” que seja coprimo de $\varphi(15)$, logo o $\text{mdc}(\varphi(x), e) = 1$.

Sabe-se que o $\varphi(15)$ é 8, logo se tem que achar um número “e” cuja o único divisor de 8 e “e” seja o 1, para obtê-lo pode-se ir tentando sequencialmente, começando pelo menor número, lembrando que o número “e” tem que ser diferente de 1. Assim, começando com 2, temos:

$$\text{mdc}(8, 2) = 2 \neq 1$$

Veja que o número “e” não pode ser o 2, pois o mdc entre 8 e 2 é o número 2 e não o 1, então passa-se para o número seguinte, para a escolha do candidato ao “e”, $e=3$.

$$\text{mdc}(8, 3) = 1$$

O número 3 atende aos requisitos, mas poderia continuar calculando para achar qualquer primo menor que $\varphi(15)$ cujo $\text{mdc}(\varphi(x), e) = 1$.

Para a codificação da frase “Amo matemática”, será usado $p=13$ e $q=17$, ou seja, $x=221$. Assim, $\varphi(221) = (13-1)(17-1) = 192$ e podemos escolher $e=5$ que é o menor número primo para que $\text{mdc}(192, 5) = 1$. Temos que a sequência numérica correspondente a frase “amo matemática” é:

$$102 - 22 - 49 - 92 - 2 - 10 - 29 - 142 - 210 - 29 - 18 - 12 - 10$$

Desta maneira, o bloco 102 da mensagem codificado se transforma no resto da divisão de 102^5 por 221. Como $102^5 \equiv 85 \pmod{221}$, temos então $C(102) = 85$. O bloco 22, ficaria $22^5 \equiv 133$

(mod 221), então $C(22) = 133$. Dessa forma podemos codificar toda a mensagem acima. E o resultado obtido é:

85 – 133 – 121 – 79 - 32 – 108 – 139 – 194 – 55 – 139 – 18 – 207 - 108

5.3 Decodificação

Para decodificar um bloco da mensagem codificada, necessitamos dos números x e o inverso de $e \text{ mod } \varphi(x)$, que chamaremos de d . O par (x, d) será denotado chave de decodificação.

Seja a um bloco da mensagem codificada, então $D(a)$ será o resultado do processo de decodificação

$$D(a) = \text{o resto da divisão de } a^d \text{ por } x$$

ou seja, $D(a)$ é a forma reduzida de a^d módulo x .

Para calcular d , basta conhecer $\varphi(x)$ e “ e ”, e usar o algoritmo euclidiano estendido, se $\text{mdc}(\varphi(x), e) = 1$, então $\varphi(x) \cdot a + e \cdot b = 1$. Considerando o exemplo anterior, temos $\varphi(221) = 192$ e $e = 5$. Logo,

$$192 \cdot a + 5 \cdot b = 1 \leftrightarrow 192 \cdot (-2) + 5 \cdot (77) = 1$$

Donde obtemos que, $5 \cdot (77) \equiv 1 \text{ mod } (192)$. Logo o inverso de 5 módulo 192 é 77. Assim, para decodificar o bloco 5 da mensagem codificada, achamos a forma reduzida de 102^{77} módulo 221. Como $85^{77} \equiv 102 \text{ (mod 221)}$, chegamos ao bloco inicial, que é 102.

Note que se b é um bloco original da mensagem, temos que ter $D(C(b)) = b$, ou seja, decodificando um bloco codificado, temos que encontrar o bloco correspondente da mensagem original.

6 Considerações finais

A matemática se faz bastante presente no cotidiano das

peessoas, e muitas vezes nem percebemos, um exemplo disso é a congruência, que é bastante utilizada na criptografia, esta que é muito importante na segurança da transmissão de dados. Assim, no decorrer do trabalho aplicamos conceito de teoria dos números em diferentes modelos de criptografia.

A Cifra de César é uma das mais simples e conhecidas técnicas de criptografia, fazendo parte inclusive de métodos mais complexos. Não é exigido grande conhecimento em matemática, visto que, esta técnica faz uso de uma aritmética simples. A desvantagem de utilizar a criptografia de César é a falta de segurança que ela apresenta, pois se uma pessoa interceptar uma mensagem e souber ou perceber que foi criptografada com uma cifra de deslocamento, torna-se fácil, decifrá-la, mesmo que não saiba qual é a quantidade a deslocar (a chave); basta tentar todos os deslocamentos possíveis até que o texto decifrado possa fazer sentido como um texto comum. E para um alfabeto de 26 caracteres, só é preciso tentar apenas 25 deslocamentos.

Já a cifra de transposição, também apresenta um método simples de cifragem, fazendo uso de uma função bijetora para cifrar, e da função inversa para decifrar. Mas apresenta um nível de segurança um pouco maior que a cifra de deslocamento, pois um primeiro método que se pode pensar para quebrar cifras de transposição é testar todas as possíveis permutações dos caracteres. Porém, um texto de 30 caracteres, geraria $30!$ (30 Fatorial) possíveis permutações.

A cifra RSA como já dito, é uma das mais usadas hoje em dia, pelo motivo de que para decifrar algo codificado com essa cifra é de extrema dificuldade, podendo levar anos para conseguir e podendo até não conseguir dependendo de quantos bits tenha os números escolhidos pelo codificador, lembrando que quanto maior os números primos escolhidos maiores dificuldades será para alguém decifrar.

A criptografia RSA apresenta um método mais dificultoso

de cifragem, mas também uma maior segurança, ganhando o título de uma das mais seguras criptografias para se usar, pelo fato de que sua congruência é exponencial, que na matemática se dá por um certo número base multiplicado por ele mesmo, quantas vezes o expoente estiver determinando, como por exemplo $3^5=3\times3\times3\times3\times3=243$, logo suas possibilidades de números e erros é muito maior, trazendo um grande nível de dificuldade.

Contudo a RSA conta com duas chaves, uma pública e uma privada, a pública tem a utilidade de criptografar, e a privada de decifrar, se escolhermos os primos certos, mesmo com a chave pública seria quase impossível de alguém conseguir decifrar a codificação. Logo, percebe-se que a criptografia é a mais segura das três aqui apresentadas.

Referências

ASSIS DE, Francisco - *Cifra de César-Criptografia monoalfabética* – 2014 - disponível em: <<http://clubedosgeeks.com.br/sem-categoria/cifra-de-cesar-criptografia-monoalfabetica>>, acesso em: 15 de março de 2019

JOSÉ FERREIRA CARNEIRO, Framilson; Livro: *Criptografia e Teoria dos números*.

LIDDELL, Henry George; SCOTT, ROBERT; Jones, Henry Stuart; MCKENZIE, RODERICK (1984). *A Greek-English Lexicon*. [S.L.]: Oxford University Press

SIGNIFICADO DE CONGRUÊNCIA – 2017 – Disponível em: <<https://www.significados.com.br/congruente/>> - acesso em: 20 de julho de 2019

OLIVEIRA, Fernando – *Entendendo a Criptografia RSA* – 2012 – Disponível em: <<https://www.lambda3.com.br>> - Acesso em: 10 de outubro de 2019

PLINIO DE OLIVEIRA SANTOS, José. Livro: *Introdução a Teoria dos Números*. IMPA: Instituto de Matemática pura e aplicada. 1998.

RODRIGUES DE S. MOREIRA, Filipi. *Congruências Lineares*. Scribd. São José dos Campos – SP. Agosto de 2006. Disponível

em: <https://pt.scribd.com/doc/44564105/Teoria-dos-Numeros-Congruencia-pdf>