

Revista Matemática e Educação

UNI-FACEF CENTRO UNIVERSITÁRIO MUNICIPAL DE FRANCA

Prof. Dr. Alfredo José Machado Neto
Reitor

Prof. Dr. João Baptista Comparini
Vice-Reitor

Prof. Dr. José Alfredo de Pádua Guerra
Pró-Reitor de Administração

Profª. Dra. Sheila Fernandes Pimenta e Oliveira
Pró-reitora Acadêmica

Profª Drª Melissa Franchini Cavalcanti Bandos
Pró-Reitora de Extensão

Prof. Ms. Cyro de Almeida Durigan
Chefe de Departamento do curso de Administração

Prof. Ms. Orivaldo Donzelli
Chefe de Departamento do curso de Ciências Contábeis

Profª. Mª. Fúlvia Nassif Jorge Facury
*Chefe de Departamento do curso de Comunicação Social-
Publicidade e Propaganda*

Profª Drª Maria de Fátima Aveiro Colares
Chefe de Departamento do curso de Psicologia

Profª. Dra. Maria Eloisa de Souza Ivan
Chefe de Departamento do curso de Letras

Profª. Dra. Silvia Regina Viel
Chefe de Departamento do curso de Matemática

Prof. Dr. Daniel Facciolo Pires
Chefe de Departamento de Computação

Prof. Dr. Flávio Henrique Costa
Chefe do Departamento do curso de Engenharia da Produção

Prof. Ms. Anderson Fabrício Mendes
Chefe do Departamento do curso de Engenharia Civil

Prof. Dr. Frederico Alonso Sabino de Freitas
Chefe do Departamento do curso de Medicina

Prof. Dr. Marinês Santana Justo Smith
Coordenador de Pós-Graduação Stricto-Sensu

Prof. Dr. Silvio Carvalho Neto
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

UNI-FACEF CENTRO UNIVERSITÁRIO MUNICIPAL DE FRANCA

Revista Matemática e Educação

ISSN 2175-4667

Revista Matemática e Educação	Franca	v.1	n.12	p.9-182	2022
--	---------------	------------	-------------	----------------	-------------

Revista Matemática e Educação
Departamento de Matemática – Uni-FACEF
Av. Ismael Alonso y Alonso 2400 – Bairro São José
14401-135 – Franca – SP
<http://www.facef.com.br>

Comissão Editorial e Editores Responsáveis

Antônio Carlos da Silva Filho
Ananda Kainne Oliveira Domenegueti Xavier
Adriana Aparecida Silvestre Gera Ribeiro
Letícia Faleiros Chaves Rodrigues
Lucinda M. de Fátima Rodrigues Coelho
Silvia Regina Viel

O conteúdo apresentado nesta revista é de
responsabilidade exclusiva de seus autores.

Capa
Beatriz Oliveira Faccirolli
André Castro Vieira

Revista Matemática e Educação / Uni-FACEF Centro
Universitário Municipal de Franca. v.1 , n.12 (2022). – Franca (SP):
Uni-FACEF, 2022.

Publicação Anual

ISSN 2175-4667

1. Matemática 2. Educação – Matemática 3. Periódicos
I – Uni-FACEF Centro Universitário Municipal de
Franca

CDD 510

Uni-FACEF – Centro Universitário Municipal de Franca
ABEC - Associação Brasileira de Editores Científicos

PREFÁCIO

A **Revista Matemática e Educação** têm como objetivos divulgar os trabalhos produzidos pelos licenciandos do curso de Matemática do Centro Universitário Municipal de Franca - Uni-FACEF e disseminar informações e pesquisas que tornem a Matemática mais próxima das pessoas.

Mais uma vez, trazemos em nossos artigos os mais diversos temas, todos eles, claro, relacionados de alguma forma à Matemática, seja por pensar no seu ensino, em estudos de conceitos e/ou teorias, seja por aplicá-la, transformando-a em ferramenta para novos conhecimentos.

Neste número, de forma especial, foram desenvolvidos estudos sobre: métodos numéricos para encontrar autovalores e autovetores e suas aplicações em problemas, por meio das Cadeias de Markov; a regressão linear, como um estudo introdutório e a regressão linear simples, e ainda um artigo que teve por objetivo destacar os principais eventos relacionados com a história da estatística e a regressão linear.

Um outro tema em evidência e pesquisado por nossos estudantes foi Business Intelligence, com foco voltado para a educação.

As pesquisas voltadas a Educação Matemática dizem respeito à discalculia no desenvolvimento infantil e o papel do professor de Matemática neste contexto e a educação financeira e sua presença da disciplina Matemática Financeira nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Fechamos as discussões envolvendo educação e ensino de matemática com o trabalho sobre discalculia, que tem como objetivo evidenciar as características do discalculico e apresentar estratégias metodológicas que podem contribuir com a aprendizagem deste estudante.

Ainda nesta revista temos um estudo de caso de pesquisa operacional, cujo foco é a otimização e suas aplicações.

Assim, esperamos despertar a curiosidade dos jovens, motivar outros estudantes e membros da nossa comunidade a pensarem sobre a Matemática e contribuir para a formação de futuros profissionais competentes e comprometidos com o futuro do país.

Agradecemos de forma especial o empenho do corpo docente e administrativo da instituição que viabilizaram esta publicação.

Boa Leitura!

Cordialmente

Silvia Regina Viel
Chefe do Departamento de Matemática
Centro Universitário Municipal de Franca – Uni-FACEF

SUMÁRIO

AUTOVALOR E AUTOVETOR: uma aplicação nas Cadeias de Markov	09
BUSINESS INTELLIGENCE: um olhar sobre a educação	35
DISCALCULIA NO DESENVOLVIMENTO INFANTIL E O PAPEL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NESTE CONTEXTO	46
EDUCAÇÃO FINANCEIRA: a presença da disciplina Matemática Financeira nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)	64
PESQUISA OPERACIONAL E A PROGRAMAÇÃO LINEAR NA MINIMIZAÇÃO DE CUSTOS E MAXIMIZAÇÃO DE LUCROS: um estudo de caso	86
PREVISÃO DOS CASOS DE COVID-19 UTILIZANDO REGRESSÃO LINEAR.....	116
REGRESSÃO LINEAR SIMPLES: um estudo da ferramenta em Estatística ...	135
TRANSTORNO ESPECÍFICO DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: discalculia	151
FORMAÇÃO PRESENCIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA REGIÃO DE FRANCA-SP.....	165

AUTOVALOR E AUTOVETOR: uma aplicação nas Cadeias de Markov

Isabela Figueiredo dos Reis Silva
Licencianda em Matemática – Uni-FACEF
isahfigueiredo@hotmail.com

Isabella Plácido de Paula Oliveira
Licencianda em Matemática – Uni-FACEF
isabellaplacido2212@gmail.com

Lucinda Maria de Fátima Rodrigues Coelho
Doutora em Ciências – Uni-FACEF
lucindarcoelho@gmail.com

Resumo: Esse artigo trata de métodos numéricos para encontrar autovalores e autovetores de matrizes com coeficientes reais, tópicos estudados em Álgebra Linear, os quais são aplicados em diversas áreas, tais como, engenharia, economia, computação etc. O principal objetivo deste trabalho é estudar e desenvolver algumas destas aplicações de autovalores e autovetores na resolução de problemas, que envolvem processos estocásticos em tempo discreto, por meio das Cadeias de Markov, ao realizar um estudo de caso com este algoritmo para determinar o número de iterações necessárias a fim de alcançar o regime estacionário. Foram realizadas pesquisas com foco no estudo de teoremas e especificações acerca de autovalor e autovetor, além disso, com o intuito de minimizar as perdas causadas pelas incertezas de todo sistema real, como intempéries naturais ou ações humanas, foi necessário aprimorar as técnicas nas Cadeias de Markov, baseado nos estudos realizados Anton e Rorres. Como aplicação, desenvolveu-se uma análise de caráter quantitativo, sobre os sabores de esfihas mais vendidos em uma esfiharia localizada no município de Patrocínio Paulista, e a partir dos fundamentos metodológicos empregados na pesquisa, é possível analisar a probabilidade de venda de cada sabor de esfiha no estabelecimento estudado, além de apresentar quando atinge seu regime estacionário.

Palavras-chave: Autovalor. Autovetor. Cadeias de Markov. Regime estacionário.

1 Introdução

A Álgebra Linear surgiu do estudo detalhado de sistemas de equações lineares e utiliza alguns conceitos e estruturas fundamentais como vetores, espaços vetoriais, transformações lineares, sistemas de equações lineares e matrizes, presentes em várias áreas tais como engenharia, genética, geografia, economia e em muitas outras.

Outros dois tópicos da Álgebra Linear, dentro da análise matricial, mais precisamente, os de autovalores e autovetores, também denominados valores próprios e vetores próprios, são bastante utilizados em problemas que envolvem sistemas dinâmicos.

Os conceitos de autovalor e autovetor de uma matriz A , de ordem n , são estudados, pois possuem inúmeras aplicações na matemática, na física, nas engenharias, e diversas outras áreas, tendo a seguinte definição: Se A é uma matriz de ordem n , real, então um vetor não-nulo v é chamado um autovetor de A se Av é um múltiplo escalar de v , ou seja, $Av = \lambda v$ para algum escalar λ . Este escalar será chamado de autovalor de A e v é um autovetor associado a λ . Considerando uma matriz quadrada, o escalar real λ é um autovalor associado a um autovetor $v \neq 0$ se $Av = \lambda v$ e pode ser calculado através das raízes dos polinômios característicos de A .

No entanto, todo sistema real recebe uma quantidade de incertezas, sejam ações humanas, intempéries naturais ou inúmeras outras coisas que interferem na exatidão do modelo matemático.

No intuito de minimizar as perdas causadas pelas incertezas, utiliza-se a técnica denominada Cadeias de Markov baseada em modelo para eventos estocásticos a fim de estabelecer seu regime estacionário.

Entre os inúmeros exemplos de eventos estocásticos, isto é, eventos que preveem um estado futuro apenas relacionado ao seu estado atual, têm-se:

- O clima de uma determinada região em certo dia da semana;
- O resultado de uma partida de basquete ao término de um campeonato;
- A cotação de uma ação no final do dia;
- O número de pessoas na fila de um banco num intervalo de tempo.

O objetivo deste artigo é aplicar autovalores e autovetores em processos estocásticos em tempo discreto, por meio das Cadeias de Markov, ao apresentar especificamente um estudo de caso utilizando este algoritmo para determinar o número de iterações necessárias a fim de alcançar o regime estacionário.

2 Autovalor e Autovetor

Autovalores e autovetores são importantes por suas características peculiares. A ideia subjacente surgiu no estudo do movimento rotacional e, mais tarde foi utilizada para classificar vários tipos de superfícies e para descrever soluções de certas equações diferenciais. No início do século XX, foi aplicada a matrizes e transformações matriciais e hoje tem aplicações a áreas tão diversas como computação gráfica, vibrações mecânicas, fluxo do calor, dinâmica populacional, mecânica quântica e até economia (ANTON, Howard; RORRES, Chris, 2012, p. 295).

A seguir, são apresentadas algumas propriedades e teoremas importantes em concordância com Howard Anton e Chris Rorres em seu livro *Álgebra Linear com Aplicações*:

DEFINIÇÃO 1: Se A for uma matriz $n \times n$, então um vetor não nulo \vec{x} em \mathbb{R}^n é denominado **autovetor** de A (ou operador matricial T_A) se $A\vec{x}$ for um múltiplo escalar de \vec{x} , isto é,

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

com algum escalar λ . O escalar λ , denominado **autovalor** de A (ou de T_A), e dizemos que \vec{x} é um **autovetor associado a λ** .

Deve-se impor a exigência de que o autovetor deverá ser não nulo para evitar o caso irrelevante $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$, que vale para quaisquer A e λ . Em que o $\mathbf{0} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Observação: Para encontrar os autovalores de A , observe que a equação $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ pode ser reescrita como $A\vec{x} = \lambda I\vec{x}$, em que I é a matriz identidade de ordem n

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \lambda I\vec{x} \rightarrow (\lambda I - A)\vec{x} = \mathbf{0}$$

Ressaltando que, para λ ser um autovalor de A , essa equação deve possuir alguma solução \vec{x} não nula. Entretanto, isso ocorre se, e somente se, a matriz de coeficientes $\lambda I - A$ tem determinante nulo. Sendo assim, têm-se:

TEOREMA 1: Se A for uma matriz $n \times n$, então λ é um autovalor de A se, e somente se, λ satisfaz a equação

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Essa equação é chamada de **equação característica** ou de **polinômio característico** de A .

EXEMPLO 1: Autovalores de uma matriz $A_{3 \times 3}$

Encontre os autovalores de uma matriz $A_{3 \times 3}$ e seu polinômio

característico.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Resolução:

$$\det [(\lambda I - A)] = 0 \rightarrow \det \left[\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & -17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Sendo assim, os autovalores de A, satisfazem a equação cúbica

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0, \text{ ou seja, } (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0.$$

Desta forma, os autovalores de A são:

$$\lambda = 4, \quad \lambda = 2 + \sqrt[2]{3}, \text{ e } \lambda = 2 - \sqrt[2]{3}$$

Definição de autovetores \vec{v} correspondente aos autovalores λ , vem:

- $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \rightarrow A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0 \rightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = 0$, em que I_n é a matriz identidade de ordem n.
- A equação $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$, tem solução $\neq 0$, se e somente se, $\det(A - \lambda I) = 0$

EXEMPLO 2: Como encontrar os autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Solução: Primeiro, para sabermos se λ é um autovalor de A deve-se verificar se

$$\det [(\lambda I - A)] = 0, \text{ então: } \det \left[\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \right] = 0 \rightarrow \det$$

$$a \left[\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} = 0 \right] \rightarrow \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(\lambda - 3) \cdot (\lambda + 1) = 0$$

Portanto, os autovalores de A são $\lambda=3$ e $\lambda=-1$.

Observação: o $\det(\lambda I - A)$ resulta em um polinômio característico $p(\lambda)$ de grau n , isto é,

$$p(\lambda) = (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Calculando os autovetores para cada autovalor, vem:

- Para $\lambda_1 = -1$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, então $(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = 0 \rightarrow$ este é o sistema de equações lineares, o qual pode ser resolvido por eliminação de Gauss ou V outro método.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ então}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 0x_2 = 0 \\ 8x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x_1 = 0 \\ 8x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = 0$$

Logo, a solução geral: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$, cujo sistema básico de soluções é $\vec{v} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, se $x_2 = 1$

Então: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$

- Para $\lambda_2 = 3$

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

De forma análoga ao caso anterior, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0x_1 + 0x_2 = 0 \\ 8x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow 8x_1 = 4x_2 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

Portanto, a solução geral é $x = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{2}x_2 \end{bmatrix}$, o sistema básico é $x = x_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$, então: $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$

Conclui-se que:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ é o autovetor associado ao autovalor } \lambda_1 = -1 \\ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ é o autovetor associado ao autovalor } \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

EXEMPLO 3: Determine os autovalores e autovetores da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução: Da definição de autovetores \vec{v} correspondente aos autovalores λ ,

$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$, vem:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando o Teorema de Laplace na 2ª coluna, tem-se,

$$\begin{aligned} (-1)^{1+2} \cdot 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ = (2 - \lambda) [(0 - \lambda)(3 - \lambda) + 2] = -\lambda(2 - \lambda)(3 - \lambda) + 2(2 - \lambda) = \\ = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \rightarrow -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0 \end{aligned}$$

Assim, encontram-se os autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, dupla multiplicidade.

Para cálculo dos autovetores correspondentes, substitui-se cada autovalor em $(A - \lambda I)$:

- Para $\lambda_1 = 1 \rightarrow (A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Como $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = 0$ vem: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ -2x_3 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Então para o autovalor $\lambda_1 = 1$, o autovetor correspondente é:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v}_1 = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\bullet \text{ Para } \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \rightarrow (A - I\lambda_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = =$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente, $A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2 \rightarrow (A - \lambda_2)\vec{v}_2 = 0$, vem

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$\{x_1 = -x_3$ sendo x_2 e x_3 as variáveis independentes, isto é, $x_2 = x_2$ e $x_3 = x_3$

A solução geral é: $\vec{x} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ que pode ser escrita como

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

E o sistema básico de soluções é :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} \text{se } x_2 = 1 \text{ e } x_3 = 0 \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{se } x_1 = 0 \text{ e } x_3 = 1 \rightarrow \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

2.1 Potências de uma matriz

Ao se obter os autovalores e autovetores de uma matriz A simples, fica a obtenção dos autovetores de qualquer potência

inteira e positiva desta mesma matriz, como por exemplo, se λ for um autovalor de A e \vec{v} for um autovetor, então \rightarrow
 $A^2 \vec{v} = A(A\vec{v}) = A(\lambda\vec{v}) = \lambda (A\vec{v}) = \lambda^2\vec{v}$

Sendo assim, isso mostra que λ^2 é um autovalor de A^2 e que \vec{v} é um autovetor associado.

TEOREMA 2: Se k for um inteiro positivo, λ um autovalor de uma matriz A e \vec{v} um autovetor associado, então λ^k é um autovalor de A^k e \vec{v} é um autovetor associado.

EXEMPLO 4: Os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ são respectivamente,}$$

$\lambda = 2$ e $\lambda = 1$, autovalores de A cujos autovetores correspondentes

$$\text{são } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então pelo TEOREMA 2, tem-se:

$$\lambda = 2^7 = 128 \text{ e } \lambda = 1^7 = 1 \text{ são autovalores de } A^7.$$

Os autovetores de A também são autovetores de A^7 associados a $\lambda = 2^7 = 128$ e $\lambda = 1^7 = 1$.

2.2 Autovalores e Invertibilidade

TEOREMA 3: Uma matriz $A_{n \times n}$ é invertível se, e somente se, $\lambda = 0$ não é um autovalor de A .

Pode-se dizer então que a matriz A do EXEMPLO 1 é invertível, pois $\lambda = 3$ ou $\lambda = -1$.

De acordo com Howard Anton e Chris Rorres em seu livro *Álgebra*

Linear com Aplicações conclui-se algumas afirmações equivalentes:

TEOREMA 4: Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

- a. A é invertível
- b. $A\vec{x} = 0$ tem somente solução trivial
- c. $\det(A) \neq 0$
- d. $\lambda = 0$ não é um autovalor de A

3 As Cadeias de Markov

Processo de Markov é um tipo de processo estocástico, ou seja, as distribuições de probabilidade para o desenvolvimento futuro dependem somente do estado presente, não levando em consideração o progresso para chegar a tal ponto. São sistemas de transições de estados, onde as posições são representadas por vetores probabilísticos, podendo variar no espaço temporal (discreto ou contínuo), sendo que essas transições entre estados são probabilísticas e dependem apenas do estado corrente.

Segundo Bremond (1998), as Cadeias de Markov foram resultados de estudos do matemático russo Andrei A. Markov (1856-1922), que começou a teoria dos processos estocásticos. Este realizou inúmeros estudos sobre a teoria da probabilidade, provando inclusive o Teorema Central do Limite. Markov analisou a sequência de vogais e consoantes no poema de Eugene Onegin (1883), e verificou empiricamente que uma vogal era seguida de uma consoante em 87% das vezes e que uma consoante era seguida por uma vogal 66% das vezes. O matemático só não imaginava que o seu trabalho teria várias outras aplicações.

A finalidade das Cadeias de Markov é prever um estado futuro, apenas relacionado ao seu estado atual, ou seja, é um tipo de processo estocástico. Graças a esse método de modelagem matemática, foi possível compreender melhor os fenômenos

científicos e sociais em diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, um engenheiro de computação necessita construir um algoritmo de busca que classifica páginas da internet levando em consideração sua relevância com a web. O sociólogo, que necessita entender como “memes”, ou de que forma características culturais espalham-se pela sociedade. O geneticista, que necessita construir o mapa genético de uma espécie. O meteorologista, que precisa prever cenários climáticos para uma determinada região. Ou até um biólogo, que necessita estudar o comportamento futuro da população de uma determinada espécie marinha submetida à pesca industrial.

Além disso, as Cadeias de Markov são uma forma muito eficiente e objetiva para extrair padrões de sinais temporais (BREMAUD,1998, P.53-56).

Para entender o que são as Cadeias de Markov, inicialmente será discutido o que é um processo estocástico.

3.1 O processo estocástico

Um processo estocástico $X = \{X_t: t \in F\}$ pode ser definido como uma família de variáveis aleatórias. Sendo F , o espaço de parâmetros:

$$F = [0, \infty) \text{ ou } F = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

No primeiro caso diremos que o processo é com parâmetro de tempo contínuo e no segundo, com parâmetro de tempo discreto.

Ao assumir que no processo X , todas as variáveis estão definidas sobre um mesmo espaço amostral. O contradomínio de todas as variáveis aleatórias será chamado espaço de estados do processo e denotados por E . Se E for discreto, diz-se que o processo estocástico é discreto, se E é contínuo, diz-se que o processo é contínuo.

Exemplo 4:

Seja $X = \{X_t: t \geq 0\}$, em que X_t indica o preço de uma ação no instante t . Nesse caso,

$$F = T = [0, \infty), E = \{x : x > 0\}$$

Um processo estocástico possui a propriedade de Markov se, dado o valor de X_t , as distribuições de X_s para $s > t$, não dependem dos valores de X_u para $u < t$. Quer dizer que o comportamento do processo no futuro não depende do passado quando o estado presente do processo é conhecido.

Os **processos markovianos** são modelados formalmente pelos modelos de Markov, que são sistemas de transições de estados, onde os estados são representados em termos de seus vetores probabilísticos, que podem variar no espaço temporal (discreto ou contínuo), e as transições entre estados são probabilísticas e dependem apenas do estado corrente. Se o espaço de estados é discreto (enumerável), então o modelo de Markov é denominado de Cadeias de Markov. As propriedades desses modelos são estudadas em termos das propriedades das matrizes de transições de estados que são utilizadas na sua descrição.

3.2 Classificação das Cadeias de Markov

Os estados de um processo de Markov são divididos em transitório e recorrente. Esta classificação diz respeito a probabilidade do processo retornar a um dado estado i se o processo partiu deste estado.

Seja f_{ii} a probabilidade de que o processo retornará ao estado i dado que o processo tenha partido deste estado, então segue a definição de estado recorrente: um estado i é recorrente se e somente se, partindo do estado i , o processo retornará ao estado i (f_{ii}) com probabilidade igual a 1.

Um exemplo de estados recorrentes corresponde a matriz de probabilidades de transição a seguir:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com dois estados recorrentes (a partir de um diagrama de transição):



Estados transitórios, também conhecidos como “não recorrentes”, são aqueles que, partindo do estado i , há uma probabilidade positiva de que o processo não retornará a esse estado (isto é, $f_{ii} < 1$). Estados recorrentes e transitórios podem coexistir numa mesma Cadeia de Markov.

3.3 Matriz de transição

Se uma Cadeia de Markov tiver k estados possíveis, que identificamos por $1, 2, \dots, k$, então a probabilidade de o sistema estar no estado i em qualquer observação se na observação imediatamente precedente estava no estado j , é denotada por b_{ji} , e é denominada **probabilidade de transição** do estado j ao estado i . A matriz $B = [b_{ji}]$ é denominada **matriz de transição** da Cadeia de Markov.

Seja B_{ij} a probabilidade de mudança do estado j para o estado i em uma unidade de tempo (geração). Deve-se tomar cuidado com a ordem dos índices.

Estado precedente

$$\text{A matriz B: } \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \text{ Novo estado}$$

Nessa matriz, b_{21} é a probabilidade que o sistema vá mudar do estado 1 para o estado 2. Assim como, b_{33} representa a probabilidade de que o sistema vá continuar no estado 3 imediatamente após ter sido observado no estado 3, e assim sucessivamente.

PROPRIEDADE 1:

As matrizes de transição das Cadeias de Markov têm a propriedade que as entradas em qualquer coluna somam 1. Isso não é acidental. Se $B = [b_{ij}]$ for a matriz de transição de uma cadeia de Markov qualquer k estados, então, dado qualquer j , deve-se ter

$$b_{1j} + b_{2j} + b_{3j} + \dots + b_{kj} = 1$$

(1)

porque se o sistema estiver no estado j numa observação, é certo que estará num dos k estados possíveis na próxima observação. Uma matriz com a propriedade (1) é denominada **matriz estocástica, matriz de probabilidade ou matriz de Markov**. Logo, a matriz de transição de uma Cadeia de Markov deve ser uma matriz estocástica.

EXEMPLO 5: Conferindo as notas dadas aos alunos do 7º ano do ensino fundamental, nota-se que 70% daqueles que tiraram nota azul no bimestre passado, continuaram obtendo no bimestre atual. E 40% daqueles que tiraram nota vermelha no bimestre passado, evoluíram e tiraram nota azul no bimestre atual. Determine a matriz de transição.

Resolução: Analisando a partir das Cadeias de Markov: o estado 1 corresponde aos alunos com nota azul no bimestre anterior e o estado 2 àqueles que tiraram nota vermelha. A matriz de transição é:

$$B = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix}$$

3.4 O vetor estado

O vetor estado de uma observação de uma Cadeia de Markov com k estados é um vetor coluna x cujo i -ésimo componente x_i é a probabilidade de o sistema estar, naquela observação, no i -ésimo estado.

As entradas em qualquer vetor estado de uma Cadeia de Markov são não negativas e têm a soma 1.

Suponha que saibamos o vetor estado $x^{(0)}$ de uma Cadeia de Markov em alguma observação inicial. O teorema a seguir nos permitirá determinar os vetores estado

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots$$

nas observações subsequentes.

TEOREMA 5: Se P for a matriz de transição de uma Cadeia de Markov e $x^{(n)}$ o vetor estado na n -ésima observação, então $x^{(n+1)} = Px^{(n)}$.

Desse teorema segue que

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= Px^{(0)} \\ x^{(2)} &= Px^{(1)} = P^2x^{(0)} \\ x^{(3)} &= Px^{(2)} = P^3x^{(0)} \\ &\vdots \\ x^{(n)} &= Px^{(n-1)} = P^n x^{(0)} \end{aligned}$$

Dessa maneira, o vetor estado inicial $x^{(0)}$ e a matriz de transição P determinam $x^{(n)}$ com $n = 1, 2, \dots$

EXEMPLO 6:

A matriz de transição no exemplo 5 foi:

$$B = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Ao construir um registro futuro de notas de um novo aluno que não tenha tirado nota azul nos bimestres anteriores. Para este aluno, o sistema inicialmente estará no estado 2, de forma que o vetor estado inicial será

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pelo teorema 5, temos,

$$\begin{aligned} x^{(1)} = Bx^{(0)} &= \begin{bmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix} \\ x^{(2)} = Bx^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,52 \\ 0,48 \end{bmatrix} \\ x^{(3)} = Bx^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,52 \\ 0,48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,556 \\ 0,444 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim, pode-se esperar que após 3 bimestres com probabilidade 0,556 que o aluno novo irá tirar nota azul novamente. Após três bimestres, obtemos os seguintes vetores estado (com até três casas decimais):

$$x^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,567 \\ 0,433 \end{bmatrix}, \quad x^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,570 \\ 0,430 \end{bmatrix}, \quad x^{(6)} = \begin{bmatrix} 0,571 \\ 0,429 \end{bmatrix}, \quad x^{(7)} = \begin{bmatrix} 0,571 \\ 0,429 \end{bmatrix}$$

Ou seja, considerando até 3 casas decimais, com cada $n > 6$, obtém-se: $x^{(n)} = \begin{bmatrix} 0,571 \\ 0,429 \end{bmatrix}$

Conclusão: Logo, os vetores estados convergem a um vetor fixo à medida que cresce o número de observações.

Os vetores estados sempre convergem a um vetor fixo na Cadeia

de Markov? Veremos no exemplo seguinte que isso não ocorre.

EXEMPLO 7:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

e $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, então $A^2 = I$ (matriz identidade) e $A^3 = A$, têm-se

$$x^{(0)} = x^{(2)} = x^{(4)} = x^{(6)} = \dots = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(3)} = x^{(5)} = x^{(7)} = \dots = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo, esse sistema oscila entre os dois vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Portanto, não converge a vetor fixo algum.

Mas, impondo uma restrição a matriz de transição, é possível mostrar que o sistema se aproxima de um vetor estado fixo.

3.5 Regularidade da matriz de transição

A matriz de transição é **regular**, se uma potência positiva da matriz tem todas as entradas positivas.

Assim, se A for uma matriz de transição regular, existe algum inteiro n tal que todas as entradas de A^n são positivas. Consequentemente, se tivermos uma Cadeia de Markov dirigida por uma matriz de transição regular, teremos então uma **Cadeia de Markov regular**. Em seguida, veremos a partir do teorema que qualquer cadeia de Markov regular possui um vetor estado fixo r tal que, com qualquer escolha $x^{(0)}$, o vetor $A^{(n)} x^{(0)}$ converge a r quando n aumenta.

TEOREMA 6:

Se A for uma matriz de transição regular então, com $n \rightarrow \infty$

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} r_1 & r_1 & \dots & r_1 \\ r_2 & r_2 & \dots & r_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_k & r_k & \dots & r_k \end{bmatrix}$$

Em que os r são números positivos tais que $r_1 + r_2 + \dots + r_k = 1$

Define-se

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & r_1 & \cdots & r_1 \\ r_2 & r_2 & \cdots & r_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_k & r_k & \cdots & r_k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix}$$

Assim, R é uma matriz de transição com todas as colunas iguais ao vetor de probabilidade r . A propriedade de R é que a cada vetor de probabilidade y , temos

$$\begin{aligned} R\mathbf{y} &= \begin{bmatrix} r_1 & r_1 & \cdots & r_1 \\ r_2 & r_2 & \cdots & r_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_k & r_k & \cdots & r_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 y_1 + r_1 y_2 + \cdots + r_1 y_k \\ r_2 y_1 + r_2 y_2 + \cdots + r_2 y_k \\ \vdots \\ r_k y_1 + r_k y_2 + \cdots + r_k y_k \end{bmatrix} \\ &= (y_1 + y_2 + \cdots + y_k) \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix} = (1) \mathbf{r} = \mathbf{r} \end{aligned}$$

Isso mostra que R transforma qualquer vetor de probabilidade y no vetor de probabilidade r fixo.

4 Aplicação: previsão de estoque de esfihas da “Isabella’s Esfiharia”

Duas amigas, de nome Isabella, com a intenção de ter um comércio juntas, decidiram se tornar sócias e abriram uma esfiharia no município de Patrocínio Paulista. Inicialmente, algumas estratégias foram adotadas para conquistar clientes, como promoções e sorteios. Recentemente, resolveram realizar uma pesquisa, com o objetivo de agilizar o atendimento, para controle de estoque, sobre os três sabores de esfihas mais vendidos nos finais de semana. Chegaram a seguinte conclusão sobre as esfihas de carne, frango e queijo as quais são as que mais atraem o paladar dos clientes:

O início da pesquisa ocorreu num determinado fim de semana aplicado a 200 clientes habituais da "Isabella’s Esfiharia"

para previsão de estoque de esfihas, através do levantamento da preferência das pessoas em relação aos três tipos de sabores oferecidos, os quais são: esfiha de carne (E_c), de frango (E_f) e queijo (E_q).

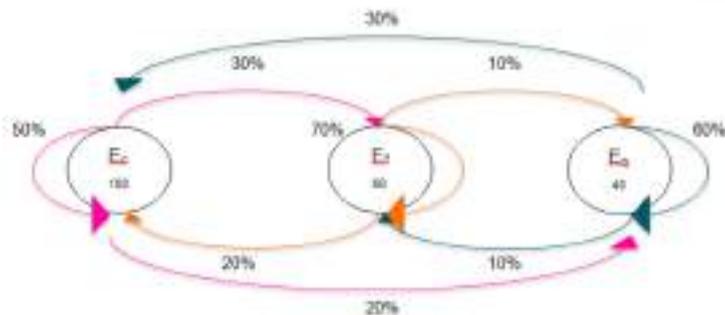
Na data 0: $\begin{cases} 100 \text{ pessoas optaram pela } E_c \\ 60 \text{ pelas } E_f \\ 40 \text{ pelas } E_q \end{cases}$

Após uma semana:

- Dos 100 consumidores de E_c , 50% continuaram pedindo a mesma, enquanto 30% optaram pelas E_f e 20% pelas E_q .
- Dos clientes que pediram E_f , 70% permaneceram na mesma opção, 20% trocaram pelas E_c e 10% pelas E_q .
- -Dos 40 clientes das E_q , das 60% continuaram na mesma opção, 30% pediram E_c e 10% optaram pelas E_f

Segue o esquema representativo dessa transição:

Figura 1: Diagrama de transição



Fonte: Autoria própria, 2022.

O esquema anterior é um exemplo de uma Cadeia de Markov (finita), isto é, representa um processo em desenvolvimento que consiste em um número finito de estados. A cada passo (a cada semana), o processo pode estar em qualquer um dos estados, no

passo seguinte, ele pode permanecer no mesmo estado ou mudar para um dos outros estados.

Após uma semana, de acordo com o esquema,

- Dos 100 clientes que haviam pedido E_c

$$0,50 (100) + 0,20 (60) + 0,30 (40) = 50 + 12 + 12 = 74$$

- Dos 60 consumidores de E_f

$$0,30 (100) + 0,7 (60) + 0,1 (40) = 30 + 42 + 4 = 76$$

- Dos 40 consumidores de E_g

$$0,2 (100) + 0,1 (60) + 0,6 (40) = 20 + 6 + 24 = 50$$

Total: $74 + 76 + 50 = 200$ pessoas

Pode-se escrever essas 3 equações na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 116 \\ 54 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Observação: as componentes dos vetores x_0 e x_1 representam o número de pessoas que consumiram E_c , E_f e E_g , respectivamente, determina-se o fim de semana (e após uma semana) então

$Mx_0 = x_1 \rightarrow$ Pode – se calcular um vetor de estado arbitrário de forma interativa, se conhecemos x_0 e M .

Considerando x_i , como vetor cujos componentes indicam a distribuição de consumidores de esfihas após i semanas.

Por exemplo, para determinar o número de consumidores

de cada tipo de esfiha após dois meses, aplica-se

$$X_2 = MX_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 116 \\ 54 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 113,8 \\ 54,6 \\ 31,6 \end{bmatrix}$$

Os vetores X_i são chamados de “vetores de estado” da Cadeia de Markov, e M é a “matriz de transição”, então

$$X_{i+1} = MX_i, \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots$$

Em outras palavras, uma Cadeia de Markov é completamente determinada por suas possibilidades de transição e por seu estado inicial.

Observação:

1. O vetor X_0 pode ser escrito como

$$X_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100/200 \\ 60/200 \\ 40/200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/10 \\ 2/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

caso se queira acompanhar o número relativo (ou percentual) ao invés do número real de consumidores.

2. As probabilidades de transição estão organizadas na matriz de transição

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

em que as colunas representam os estudos presentes e as linhas como os estados subsequentes.

3. As colunas da matriz M são vetores de probabilidade (soma dos elementos de cada coluna é sempre igual a 1); toda matriz quadrada

com essa propriedade é denominada “matriz estocástica”.

4. Devido à natureza determinística determinada das Cadeias de Markov, pode - se escrever:

$$\begin{aligned} X_1 &= AX_0 \\ X_2 &= AX_1 = AAX_0 = A^2X_0 \\ X_3 &= AX_2 = AA^2X_0 = A^3X_0 \\ X_k &= A^k X_0 \end{aligned}$$

Agora calculando a partir dos autovalores:

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

A definição de autovetores \vec{v} correspondentes aos autovalores λ segue:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \rightarrow A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0 \rightarrow (A-\lambda I)\vec{v} = 0 \quad (1)$$

Em que In é a matriz identidade de ordem n.

A equação 1 tem solução $\neq 0$ se, e somente se, $\det(A-\lambda I)=0$

$$\therefore \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} (\frac{1}{2} - \lambda) & \frac{7}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & (\frac{1}{5} - \lambda) & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & (\frac{1}{10} - \lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{4}{5}\lambda^2 + \frac{19}{100}\lambda + \frac{1}{100} = -\frac{1}{100}(100\lambda^3 -$$

$$19\lambda - 1) = -\frac{1}{100}(\lambda - 1)(100\lambda^2 + 20\lambda + 1) = 100(-\frac{1}{100})(\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{10})^2 = 0$$

$$\therefore \text{são soluções os autovalores: } \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{10} \end{cases}$$

Para calcular os autovetores correspondentes deve-se aplicar λ_1 e λ_2 na equação 1.

$$(A-\lambda_1 I) = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}-1) & \frac{7}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & (\frac{1}{5}-1) & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & (\frac{1}{10}-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{10} \end{bmatrix}$$

Para encontrar \vec{v}_1 , $(A-\lambda_1 I) \vec{v} = 0$, em princípio $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, \therefore

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{o que nos dá um sistema de equações}$$

lineares o qual será resolvido por eliminação de Gauss

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{7}{10}x_2 + \frac{3}{5}x_3 = 0 \\ \frac{3}{10}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{10}x_3 = 0 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 - \frac{9}{10}x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \times (-2)} \begin{cases} x_1 - \frac{7}{5}x_2 - \frac{6}{5}x_3 = 0 \\ \frac{3}{10}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{10}x_3 = 0 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 - \frac{9}{10}x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 - \frac{3}{10}L_1 \rightarrow L_2} \begin{cases} x_1 - \frac{7}{5}x_2 - \frac{6}{5}x_3 = 0 \\ 0x_1 - \frac{19}{50}x_2 + \frac{33}{50}x_3 = 0 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 - \frac{9}{10}x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{7}{5}x_2 - \frac{6}{5}x_3 = 0 \\ 0x_1 - \frac{19}{50}x_2 + \frac{33}{50}x_3 = 0 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 - \frac{9}{10}x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 - \frac{1}{5}L_1 \rightarrow L_3} \begin{cases} x_1 - \frac{7}{5}x_2 - \frac{6}{5}x_3 = 0 \\ 0x_1 - \frac{19}{50}x_2 + \frac{33}{50}x_3 = 0 \\ 0x_1 + \frac{19}{50}x_2 - \frac{33}{50}x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \times (-\frac{50}{19})} \begin{cases} x_1 - \frac{7}{5}x_2 - \frac{6}{5}x_3 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 - \frac{33}{19}x_3 = 0 \\ 0x_1 + \frac{19}{50}x_2 - \frac{33}{50}x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{7}{5}x_2 - \frac{6}{5}x_3 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 - \frac{33}{19}x_3 = 0 \\ 0x_1 + \frac{19}{50}x_2 - \frac{33}{50}x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 - (\frac{19}{50})L_2 \rightarrow L_3} \begin{cases} x_1 - \frac{7}{5}x_2 - \frac{6}{5}x_3 = 0 \\ 0 + 1x_2 - \frac{33}{19}x_3 = 0 \\ 0 + 0 - 0 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 + (\frac{7}{5})L_2} \begin{cases} x_1 + 0x_2 - \frac{69}{19}x_3 = 0 \\ 0 + 1x_2 - \frac{33}{19}x_3 = 0 \\ 0 + 0 - 0 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + 0x_2 - \frac{69}{19}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{33}{19}x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Pode-se concluir } \begin{cases} x_1 = \frac{69}{19}x_3 \\ x_2 = \frac{33}{19}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \rightarrow \text{a solução}$$

geral é

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{69}{19}x_3 \\ \frac{33}{19}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{69}{19} \\ \frac{33}{19} \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \vec{v}_1 \therefore \text{para } x_3 = 1 \rightarrow \lambda_1 = 1 \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{69}{19} \\ \frac{33}{19} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Cálculo do autovetor \vec{v}_2 correspondendo ao autovalor λ_2 , para $\lambda_2 = -\frac{1}{10}$, substituindo na equação 1, vem:

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right) & \frac{7}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & \left(\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{10}\right)\right) & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10} - \left(-\frac{1}{10}\right)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{10} & \frac{7}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I) \cdot \vec{v}_2 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{5}x_1 + \frac{7}{10}x_2 + \frac{3}{5}x_3 = 0 \\ \frac{3}{10}x_1 + \frac{3}{10}x_2 + \frac{3}{10}x_3 = 0 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações lineares acima pelo método de eliminação de Gauss, vem:

$$L_1 \times \frac{5}{3} \rightarrow \begin{cases} 1x_1 + \frac{7}{6}x_2 + 1x_3 = 0 \\ \frac{3}{10}x_1 + \frac{3}{10}x_2 + \frac{3}{10}x_3 = 0 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 0 \end{cases} \quad L_2 - \left(\frac{3}{10}\right)L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow \begin{cases} 1x_1 + \frac{7}{6}x_2 + 1x_3 = 0 \\ 0x_1 - \frac{1}{20}x_2 + 0x_3 = 0 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 0 \end{cases}$$

$$L_3 - \left(\frac{1}{5}\right)L_1 \rightarrow L_3 \rightarrow \begin{cases} 1x_1 + \frac{7}{6}x_2 + 1x_3 = 0 \\ 0x_1 - \frac{1}{20}x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 - \frac{2}{15}x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \quad L_2(-20) \rightarrow L_2 \rightarrow \begin{cases} 1x_1 + \frac{7}{6}x_2 + 1x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 - \frac{2}{15}x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

$$L_3 + \left(\frac{2}{15}\right)L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{7}{6}x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \quad L_1 - \left(\frac{7}{6}\right)L_2 \rightarrow L_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \rightarrow \text{a solução geral é}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Conclusão: } \begin{cases} \text{autovalor } \lambda_1 = 1 \rightarrow \text{autovetor } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 69 \\ 19 \\ 33 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{autovalor } \lambda_2 = -\frac{1}{10} \rightarrow \text{autovetor } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

5 Considerações Finais

Autovalores e Autovetores são conceitos importantes em Matemática, com aplicações práticas em diversas áreas das ciências exatas tais como, Processamento de Imagens, Análise de Vibrações, desde somente operações matemáticas até análises de dados, sistemas dinâmicos e muitos outros. Encontrar autovalores e autovetores de uma matriz que modela um problema estudado, é uma poderosa ferramenta na análise de matrizes. As aplicações matemáticas são bastante utilizados em problemas que envolvem sistemas dinâmicos, por ser através deles estudada a estabilidade de sistemas comuns no cotidiano, tanto as mais simplificadas quanto as mais complexas.

Com um bom entendimento sobre sistemas lineares e a base da matemática matricial, processos estocásticos, autovalores e autovetores, obtém-se resultados a partir de poucos dados. É notável a importância do conhecimento e do aprofundamento sobre esse assunto em suas inúmeras alternativas de aplicações para estudos futuros do mesmo.

Referências

ANTON, H., DOERING, C. I. e RORRES, C. Álgebra Linear com Aplicações. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ANTON, Howard; RORRES Chris. Álgebra Linear: com aplicações. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

LANG, S. Álgebra Linear. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.
LAY, David J. Álgebra Linear e suas aplicações. 2. ed. Rio de Janeiro, LTC- Livros Técnicos e Científicos, 2007.

LEON, STEVEN J . Álgebra linear com aplicações. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1999.

LIPSCHUTZ, S. Álgebra linear: teoria e problemas. 3. ed. rev.e ampl. Rio de Janeiro: Makron Books, 1994.

STEINBRUCH, A. e WINTERLE, P. Álgebra Linear. São Paulo: Pearson-Makron Books, 2007

BUSINESS INTELLIGENCE: um olhar sobre a educação

Maria Fernanda Justino Ferreira
Licencianda em Matemática – Uni-FACEF
mariafernanda.justino15@gmail.com

Letícia Faleiros Chaves Rodrigues
Mestre em Matemática – uni-FACEF
leticia@facef.br

Resumo: Neste trabalho busca-se analisar os benefícios trazidos pelo Business Intelligence, sua aplicação na gestão, escolar ou familiar, visando apresentar situações problemas aos alunos do ensino médio, a fim de prepará-los para analisar dados concretos, auxiliando na tomada de decisão, utilizando dos recursos matemáticos e tecnológicos envolvidos nesse processo. Explicar conceitos de Business Intelligence, mostrando sua evolução ao longo dos anos, importância e significado dentro de uma empresa ou setor. Expor conceitos de lógica e estatística para compreensão e transformação de dados em informações assertivas. Apresentar o uso da ferramenta Power BI para análise e visualização dos dados. E por fim, apresentar situações concretas dentro de um ramo empresarial, mostrando a eficácia da tomada de decisão assertiva.

Palavras-chave: Análise de dados. Business Intelligence

1 Introdução

Atualmente, devido ao grande volume de dados, tem se a necessidade de transformar estes dados em informações, gerando conhecimento para tomada de decisão. E no âmbito geral da gestão de empresas, escolas, todas elas possuem um mínimo de preocupação com os seus atuais resultados, rendimentos e aqueles que ainda estão por vim, sendo pontuado aí a importância de uma análise de seus processos, procedimentos, decisões e demais dados a serem pautados na busca de um desenvolvimento maior.

Assim, com as ferramentas matemáticas adequadas podemos entender melhor os negócios. Pois, através da matemática, podemos demonstrar fatos, que geram conclusões, auxiliando em

decisões adequadas para o crescimento da empresa, gestão das atividades escolares, até mesmo gestão dos recursos familiares.

Um termo que bem crescendo é o Bussiness Intelligence ou inteligência do negócio, trata-se de transformar dados em informações. Através do Bussiness Intelligence, o gestor é capaz de identificar comportamentos e preferências dos consumidores e do mercado para fazer uma gestão mais eficiente, buscando oferecer otimizações e resultados benéficos para toda a sociedade.

Desta forma, no presente trabalho, será apresentado conceitos sobre o Bussiness Intelligence, o uso do software Power BI como auxílio para visualização dos resultados, além de fazer uso da matemática para análise destes dados, a fim de identificar situações e assim auxiliar a aplicação de uma educação prática e que conta com a participação de cada estudante buscando desenvolver a aplicação dessas ferramentas que vem ganhando espaço com o passar do tempo, gerando processos mais eficientes dentro do âmbito empresarial.

Além disso, temos um avanço da tecnologia e em contrapartida percebe-se uma deficiência de profissionais qualificados para trabalhar na análise de dados, ao mesmo tempo em que o ensino médio está passando por novas transformações. Logo, será proposto uma atividade visando introduzir o Bussiness Intelligence, utilizando o Power BI, aplicando conceitos estatísticos para estes alunos do ensino médio, a fim de despertar o interesse dos mesmos e prepará-los para o mercado de trabalho.

2 Análise de dados

Quando pensamos em dados e informações, não podemos desconsiderar o seu fluxo e a forma como a sua quantidade cresceram e se desenvolveram junto com a internet e a tecnologia. Os meios de comunicação facilitaram a forma com que as informações se propaguem por todos os campos, deixando com

que o seu acesso seja cada vez mais disponível a todos, se tornando cada vez mais necessário, passar as informações por uma espécie de “peneira” e desta forma, algumas ferramentas e conceitos são criados e utilizados para que esse objetivo seja alcançado.

O conceito de big data está relacionado à capacidade de processar e analisar grandes volumes de informação que permitam a extração de conhecimentos úteis para melhorar o processo de tomada de decisão (US Department of Education, 2012). No campo educacional, as técnicas relacionadas à big data podem tornar mais eficazes os processos de avaliação, feedback e entrega do conteúdo. Essa prática tem gerado a possibilidade de capturar muitas informações sobre os estudantes e sobre a sua interação com os conteúdos instrucionais, ambientes de aprendizagem e sobre o processo de avaliação, que são difíceis de ser coletadas e interpretadas por meio de abordagens tradicionais que não façam uso de tecnologias com alto poder de processamento e análise. (SAICO; QUEIROZ; SAICO; 2014).

Conforme citado anteriormente, a análise de dados e informações cabe em todos os âmbitos inclusive na educação, onde podemos otimizar muitos processos e procedimentos que poderão ser analisados com olhares que ainda não estavam sendo “utilizados”, podendo compreender além de tudo, comportamentos e interesses.

Quando pensamos primeiramente no conceito de Big Data, vemos como a propriedade de analisar grandes volumes de informação que permitam a extração de conhecimentos úteis para melhorar o processo na tomada de decisão (Dantas; Queiroz; Saico, 2014), esta que pode partir tanto ponto de vista empresarial, ambiental, área da saúde e qualquer que seja a área ao qual deseje-se colher informações, analisá-las e chegar a um determinado resultado que auxilie na tomada de decisão.

O uso de big data pode reunir e analisar uma imensidade de dados que são produzidos pelas relações de ensino-aprendizagem. Com o uso de tecnologias pode-se coletar muito mais informações, em variados graus de granularidade, que os métodos manuais não são capazes de coletar. Capturar evidências que apontem a sequência de passos que um estudante usou para resolver um problema, suas estratégias, o número de conselhos que precisou receber e o tempo gasto na análise de cada parte do problema são alguns exemplos. A capacidade de processar massas de dados em escala, através da análise e da comparação de comportamento de milhares de estudantes, é muito importante para gerar conhecimentos generalizáveis sobre o processo de aprender e as dificuldades inerentes a determinado conteúdo ou estratégias pedagógicas. (SAICO; QUEIROZ; SAICO; 2014).

Embasado nas considerações acima, partiremos para reflexões acerca da educação, metodologias com o mesmo propósito e associações semelhantes destas com a plataforma, guiando análises e associações entre tais objetos de estudo.

Quando pensamos na educação, nos remetemos ao desenvolvimento e construção de cidadãos, seres com a capacidade de pensar, compreender e colocar em prática aquilo que se é desenvolvido.

Conforme considerado anteriormente, com o passar do tempo e o desenvolvimento em larga escala das informações, seu acesso, desenvolvimento da tecnologia e demais quesitos, visualizamos diversas adaptações para que acompanhe tais necessidades e na educação não é diferente.

Ao buscar desenvolver novos moldes inovadores que acompanhe as adaptações sociais, visualizamos as metodologias que vem se desenvolvendo gradualmente.

[...] buscando desenvolver, de maneira integrada, moldes inovadores para a educação, formação de lideranças e atenção à saúde, com o objetivo de formar profissionais

com qualificação técnica consistente e capacidade de atuação profissional e social, visando melhorar a saúde das pessoas. A comunidade foi considerada importante na formulação de políticas locais, ações de saúde e na formação de lideranças (...) voltado às necessidades da população. (MELO; SANT'ANA; 2013).

Assim como visualizado acima, podemos colocar como pauta a metodologia ativa, esta que vem como meio de colocar em prática tais objetivos de formar profissionais com capacidades consistentes e líderes não só em meios sociais, mas também autores na tomada de suas próprias decisões, refletindo em melhoras e desenvolvimentos tanto sociais como individuais desenvolvendo o interesse dos alunos durante a participação nos processos.

Metodologias ativas são estratégias de ensino centradas na participação efetiva dos estudantes na construção do processo de aprendizagem, de forma flexível, interligada, híbrida. As metodologias ativas num mundo conectado e digital se expressam através de modelos de ensino híbridos, com muitas possíveis combinações. A junção de metodologias ativas com modelos flexíveis, híbridos traz contribuições importantes para a o desenho de soluções atuais para os aprendizes de hoje (MORAN, 2017, p. 24).

Embasado em tais processo, seguiremos aprofundando em uma das aplicações da metodologia ativa, conforme citado acima, modelo flexível com combinações que visa o desenvolvimento da autonomia, modelos flexíveis e adaptáveis a cada forma de aprender individual do aluno.

3 Aprendizagem baseada em problemas (PBL)

Em meio as tentativas de realizar as adaptações necessárias durante os processos de aprendizagem com o passar dos anos, refletiremos acerca desta, a Aprendizagem Baseada em

Problemas (APB) ou Problem Based Learning (PBL). Para embasar tal metodologia, podemos pensar na seguinte definição:

[...] um caminho que conduz o aluno para a aprendizagem. Nesse caminho, o aluno busca resolver problemas inerentes à sua área de conhecimento, com o foco na aprendizagem, tendo em vista desempenhar um papel ativo no processo de investigação, na análise e síntese do conhecimento investigado. (SOUZA; DOURADO. 2015.)

Portanto, visualizamos a aplicação concreta de uma busca do saber de forma autônoma e instigadora, buscando enfatizar e solidificar os conhecimentos em construção, colocando o aluno como o protagonista, sendo aquele quem busca as respostas e orientações que cabem dentro de cada proposta.

Conforme guiado por Paulo Freire, visualizamos que a educação bancária onde o professor é o detentor de todo conhecimento e o aluno apenas deve receber aquele conhecimento transmitido, vemos a APB como uma forma de se opor a esta forma de pensamento, visto que o professor é visto como um tutor que irá intermediar e orientar ao invés de realizar tudo dentro da aula.

A estrutura da ABP foi concebida justamente para que o aluno desenvolva habilidades e capacidades para proceder à investigação de forma metódica e sistemática; para aprender a trabalhar em grupo cooperativo e alcançar os resultados da pesquisa, de forma satisfatória, complementando sua aprendizagem individual. (SOUZA; DOURADO; 2015).

De tal forma, concretiza-se o saber e o partilhar durante as trocas nas relações professor aluno ou até mesmo nas partilhas cooperativa entre os alunos envolvidos, que participam integralmente dos processos, se tornam parte do aprender e de toda a construção do conhecimento.

4 O uso da tecnologia em sala de aula e aplicação do programa Power BI

Expomos anteriormente os propósitos do Business Intelligence, tal que vem para otimizar e processar dados de forma que facilite e desenvolva a visualização das informações com novos olhares, de forma a buscar um olhar distinto dos olhares comuns.

O **Microsoft Power BI** é uma coleção de serviços de software, aplicativos e conectores que funcionam juntos para tornar suas fontes de dados não relacionadas em informações coerentes, visualmente imersivas e interativas. Se os seus dados forem uma simples pasta de trabalho do Microsoft Excel ou uma coleção de data warehouses híbridas locais e na nuvem, o **Power BI** permite que você se conecte facilmente às suas fontes de dados, visualize (ou descubra) o que é importante e compartilhe isso com qualquer pessoa ou com quem você quiser. (Disponível em: Microsoft Power BI)

Ainda nesta forma de pensar, pensa-se em uma associação da tecnologia como metodologia de ensino, aplicada a autonomia que se busca em aplicações com propósitos conforme APB, podemos unificar o uso da plataforma citada com a metodologia analisada, onde aplicaremos utilizando os meios tecnológicos, propostas com que o aluno aplique seus conhecimentos referente a uso das plataformas Excel e Power BI associados a problematização orientada em sala.

Tal proposta será aplicada de forma que os alunos trabalhem suas capacidades de partilhar em grupo, construir em conjunto seus conhecimentos que serão analisados, sejam com dados numéricos, gráficos ou qualquer que seja o objetivo em que se deseja alcançar.

5 Proposta de atividade

Tendo como base a habilidade proposta ao 1º ano do Ensino Médio (EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

O trabalho será realizado em grupo com até 6 pessoas, onde cada uma terá acesso a um computador de forma que possa aplicar os conhecimentos adquiridos nas plataformas de Excel e Power BI, realizando primeiramente cada um em seu computador um exercício com o seguinte objetivo: classificar em uma planilha os gastos e os ganhos de cada família via Excel e aplicar como forma visual dos ganhos e gastos durante 1 ano, se necessário fazendo adaptações durante os meses para que se flexibilize os resultados formando o gráfico como proposto.

Proposta de atividade 2 será de reunir os dados de todos os integrantes do grupo de forma que se visualize um só gráfico de aplicação para todos os integrantes, buscando visualizar os dados em conjunto. Após esta proposta, cada grupo apresentará os dados visualizados, em formato de exposição para a sala.

Junto aos grupos, o tutor reunirá todos os gráficos dos grupos em uma representação, de modo que os dados da sala sejam analisados.

Dados (exemplo) utilizados em aula:

	A	B	C	D	E	F
1	Análise referente ao mês de Novembro					
2	Variáveis	Família I	Família II	Família III	Família IV	Família V
3	Plano de saúde	R\$ 120,00	R\$ 1.080,00	R\$ 512,00	R\$ 0,00	R\$ 3.000,00
4	Farmácia	R\$ 280,00	R\$ 354,50	R\$ 789,85	R\$ 103,00	R\$ 1.239,00
5	Educação	R\$ 570,00	R\$ 1.500,00	R\$ 1.200,00	R\$ 570,00	R\$ 570,00
6	Aluguel/financiamento	R\$ 896,00	R\$ 1.390,00	R\$ 3.450,00	R\$ 2.900,00	R\$ 1.600,00
7	Combustível	R\$ 2.000,00	R\$ 600,00	R\$ 429,00	R\$ 780,00	R\$ 1.090,00
8	Outras despesas carro	R\$ 7.000,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 530,00
9	Supermercado	R\$ 2.100,00	R\$ 1.500,00	R\$ 1.800,00	R\$ 3.000,00	R\$ 3.300,00
10	Restaurante	R\$ 300,00	R\$ 540,00	R\$ 120,00	R\$ 240,00	R\$ 90,00
11	Lazer	R\$ 450,00	R\$ 707,00	R\$ 1.200,00	R\$ 609,00	R\$ 804,00
12	Cartão de Crédito	R\$ 3.540,00	R\$ 2.190,00	R\$ 3.300,00	R\$ 1.099,00	R\$ 570,00

Fonte: Autora, Exel 2010.

6 Considerações finais

O mercado tem se mostrado cada vez mais competitivo e cabe a cada organização empresarial se organizar para que o seu desenvolvimento ocorra de maneira efetiva, visando lucros e desenvolvimentos mais assertivos.

Desta forma, o olhar visto como um todo, desde o que já se alcançou, o que se tem em mãos e o que virá é imprescindível, uma análise que busque reduzir a quantidade de erros nesses processos, e buscar decisões cada vez mais assertivas em torno da pauta em questão.

Com esse objetivo de evolução, após uma série de análises e buscas, visualizamos uma evolução desse procedimento, chamado Business Intelligence termo vem ganhando espaço dentro do âmbito empresarial mesmo não tendo sua utilização tão efetiva como deveria (visando todos os benefícios encontrados). O Business Intelligence ou inteligência de negócio, é um conjunto de práticas que visam proporcionar dados e informações relevantes para a gestão eficiente de uma empresa.

Após as análises apresentadas no desenvolvimento desta pesquisa, perceberemos que o BI vem com esse objetivo

de otimizar processo e desenvolver melhoras nos processos empresariais, focando em resultados assertivos, baseados em fatos e concretizações.

Uma empresa ser bem-sucedida ou não no mercado, depende das decisões que serão tomadas. A tomada de decisão é um dos momentos mais críticos na gestão de qualquer negócio, pois envolve a escolha de um caminho que pode ser irreversível. Nesse sentido, o BI contribui para que as definições sejam feitas com base em informações concretas e seguras, além de permitir uma previsão de cenários mais confiável.

Dentre os principais softwares de aplicação de Business Intelligence, o Power Bi vem se destacando, este que é uma ferramenta de avaliação e visualização de dados da Microsoft, cujo principal objetivo é auxiliar na tomada de decisão assertivas através do Business Intelligence.

Assim, apesar da matemática não receber sua devida importância dentro do mundo empresarial, acredita-se que seja fundamental para potencializar o crescimento de uma empresa ou setor. Através da matemática, os dados podem ser transformados em algoritmos computacionais extremamente eficientes e modelos matemáticos e assim compreender um problema existente na empresa, representá-lo e, brevemente, encontrar soluções que se adequem à realidade de cada negócio.

Seguindo com a análise das informações já proposta, não podemos deixar de colocar a importância da formação desses profissionais, e como auxílio nessa formação, utilizamos cada método apresentado como a metodologia.

Logo, o objetivo da pesquisa é aplicar a matemática ao negócio e os futuros atuantes dentro de cada área, fazendo uma análise dos dados, com o uso do software Power BI, durante sua formação aplicando a metodologia ativa de forma que busque a autonomia e desenvolvimento do raciocínio, e sendo assim auxiliar na tomada de decisões mais assertivas de maneira eficiente.

7 Referências

BOTELHO, Fernando Rigo; FILHO, Edelvino Razzolini. Conceituando o termo Business Intelligence: origem e principais objetivos. *Sistemas, Cibernética e informática*, Paraná, v. 11, 2014.

CASTRO, Lucas & SILVA, Marcos (2015). Business Intelligence (BI): *Análise comparativa entre as ferramentas líderes no mercado*. Uberlândia. Centro Universitário do Triângulo (UNITRI).

(PEREIRA, REZENDE, & ABREU, 2000; POWER, 2007; DAVENPORT, HARRIS, & MORISON, 2010; BARBIERI, 2011). PEREIRA, R. O., REZENDE, D. A., & ABREU, A. F. (2000). *Gestão do conhecimento com apoio dos recursos de sistemas de informação e tecnologias emergentes*. In Encontro Nacional de Engenharia de Produção - ENEGEP. São Paulo. Disponível em: http://www.abepro.org.br/biblioteca/ENEGEP2000_E0_144.PDF

MORAN, José. Metodologias e modelos híbridos na educação. In: YAEHASHI, Solange Franci Raimundo et al. (Orgs.). *Novas Tecnologias Digitais: Reflexões sobre mediação, aprendizagem e desenvolvimento*. Curitiba: CRV, 2017.p.23-35.

NOFFS, Neide & SANTOS, Sidney. O DESENVOLVIMENTO DAS METODOLOGIAS ATIVAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA E OS PARADIGMAS PEDAGÓGICOS EDUCACIONAIS (2019). *Revista e-Curriculum*, São Paulo, v.17, n.3, p. 1837-1854 out./dez. 2019.

SANTOS, M. R. (2009). *Aplicação de Business Intelligence para Análise de Indicadores das Redes de Referência no Estado do Paraná*. Universidade Estadual de Londrina.

SOUZA, S. & DOURADO, L. (2015). *Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP): um método de aprendizagem inovador para o ensino educativo*. *Holos*, 31(5) 182-200.

SAICO, Pasqueline; QUEIROZ, Ruy; SAICO, Alexandre (2014). *O conceito big data na educação*. 3º Congresso Brasileiro de Informática na Educação (CBIE 2014). 20º Workshop de Informática na Escola (WIE 2014).

VERCELLIS, C. (2009). *Business Intelligence: Data Mining and Optimization for Decision Making* (p. 417). United Kingdom: Wiley

MELO, Barbara & SANT'ANA, Geisa (2013). *A prática da Metodologia Ativa: compreensão dos discentes enquanto autores do processo ensino e aprendizagem*. Curso de Enfermagem da Escola Superior de Ciências da Saúde / Fundação de Ensino e Pesquisa em Ciências da Saúde. Brasília-DF, Brasil.

DISCALCULIA NO DESENVOLVIMENTO INFANTIL E O PAPEL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NESTE CONTEXTO.

Mateus Bernardes Ferreira
Licenciando em Matemática – Uni-FACEF
erreiramateus00@hotmail.com

Valéria Beghelli Ferreira
Doutora em Serviço Social Uni-FACEF
valbeghelli@yahoo.com.br

Resumo: A aprendizagem é fruto da interação de fatores extrínsecos e intrínsecos, como as capacidades cognitivas, sensoriais e o próprio estilo pessoal de cada um. No processo de aprendizagem podem surgir dificuldades e/ou alguns distúrbios. Dentre os transtornos de aprendizado em relação a matemática está a Discalculia, definida como um problema causado por má formação neurológica, que se manifesta como uma dificuldade da criança em realizar operações matemáticas, classificar números e colocá-los em sequência, além de impedir a compreensão dos conceitos matemáticos e sua incorporação na vida cotidiana. O trabalho objetivou uma reflexão sobre o transtorno da Descalculia no desenvolvimento infantil e o papel do professor de matemática neste contexto por uma revisão bibliográfica narrativa realizada em base dados, periódicos de licenciatura, livros que deram suporte teórico ao tema. O estudo mostrou a importância de educadores conhecerem a discalculia profundamente, buscarem ampliar seus conhecimentos na área, e buscar conhecer os possíveis tratamentos, dialogar com os centros de cuidados para estes distúrbios, trabalhar equipe multidisciplinar e buscar apoio especializado. Para tanto, é preciso que os professores olhem além dos números e das equações, olhem para as crianças e seu desenvolvimento em todas as suas dimensões e contexto, buscando uma educação qualificada.

Palavras-chave: Discalculia. Discalculia e Matemática. Desenvolvimento Infantil. Formação do professor e Discalculia.

1 Introdução

Segundo Coelho (2000) apud Muller (2011), a aprendizagem é fruto da interação de fatores extrínsecos ao indivíduo (condições

socioeconômicas, método de ensino, modelos educativos, entre outros) e intrínsecos, como as capacidades cognitivas, sensoriais e o próprio estilo pessoal de cada um.

O desejo de aprender é inerente ao ser humano, embora apresente diferentes potenciais de aprendizagens e de conhecimentos. Muitas crianças apresentam um potencial médio, ou acima da média, mas ainda assim, apresentam insucesso na escola, principalmente no que se relaciona ao ensino da Matemática e que envolve pré-requisitos para seu entendimento (FERREIRA; FERREIRA, 2004).

Segundo Pimentel; Lara (2017) é importante destacar que são poucas as literaturas brasileiras que discutem o transtorno de aprendizagem na Matemática, por isso a relevância de investigar e pesquisar teóricos que se destacam nesse campo da educação.

“... As dificuldades de aprendizagem específicas (DAE) dizem respeito à forma como um indivíduo processa a informação – a recebe, a integra, a retém e a exprime – tendo em conta as suas capacidades e o conjunto das suas realizações. As dificuldades de aprendizagem específicas podem, assim, manifestar-se nas áreas da fala, da leitura, da escrita, da matemática e/ou da resolução de problemas, envolvendo défices que implicam problemas de memória, perceptivos, motores, de linguagem, de pensamento e/ou metacognitivos. Estas dificuldades, que não resultam de privações sensoriais, deficiência mental, problemas motores, défice de atenção, perturbações emocionais ou sociais, embora exista a possibilidade de estas ocorrerem em concomitância com elas, podem, ainda, alterar o modo como o indivíduo interage com o meio envolvente (CORREIA, 2007 apud MULLER, 2011, p. 9).

Neste sentido, Muller (2011) ressalta que as dificuldades matemáticas, juntamente com as dificuldades de aprendizagem, muitas vezes são justificadas por explicações pedagógicas não suficientemente precisas. Para a autora, muitos professores rotulam alunos como: não possuem habilidades pré-requeridas,

apresentam falhas na compreensão de conceitos, indicam reforço inadequado ou insuficiente, oferecem escassas oportunidades para a prática de aprendizagem e até mesmo dificultam a "ensinagem".

Villar (2017) complementa que é na sala de aula, no encontro entre aluno e professores que as transformações acontecem. Na convivência com os alunos é que suscitam questionamentos, reflexões e interesse investigativo a respeito de um processo de trabalho educativo que contemplem os diferentes estilos de ensino-aprendizagem, diante de uma nova realidade. Para o autor, o professor e o processo de aprendizado devem se preocupar não mais de como se ensina, mas como o aluno aprende, para estar preparado para intervenções adequadas às necessidades desses alunos e superar suas dificuldades em aprender matemática.

Muller (2011), porém aponta que nem sempre estas são as causas dos insucessos na aprendizagem da matemática, podendo ter como explicação um transtorno chamado "Discalculia".

De acordo com o Código Internacional de Doenças (CID-10), documento que padroniza e cataloga as doenças e problemas relacionados à saúde, tendo como referência a Nomenclatura Internacional de Doenças estabelecida pela Organização Mundial de Saúde, as dificuldades escolares são nomeadas como Transtornos Específicos do Desenvolvimento das Habilidades Escolares (PIMENTEL; LARA, 2017).

Dessa forma, de acordo com as autoras, é possível diferenciar dificuldades de aprendizagem de transtorno de aprendizagem, pois a dificuldade abrange um grupo heterogêneo de problemas capazes de alterar as possibilidades da criança aprender, enquanto o transtorno, supõe que exista a predominância de fatores biológicos.

Corroborando com essa ideia, Pimentel; Lara (2017), apontam que o Manual diagnóstico e estatístico de transtornos mentais (DSM – V) confirma que o Transtorno Específico da Aprendizagem é considerado uma Dificuldade na aprendizagem e

no uso de habilidades acadêmicas, conforme indicado pela presença de ao menos um dos sintomas a seguir e que tenha persistido por pelo menos 6 meses, apesar da provisão de intervenções dirigidas a essas dificuldades.

Neste sentido a discalculia é definida pelo DSM-V como:

... um termo alternativo usado em referência a um padrão de dificuldades caracterizado por problemas no processamento de informações numéricas, aprendizagem de fatos aritméticos e realização de cálculos precisos ou fluentes. Se o termo discalculia for usado para especificar esse padrão particular de dificuldades matemáticas, é importante também especificar quaisquer dificuldades adicionais que estejam presentes, tais como dificuldades no raciocínio matemático ou na precisão na leitura de palavras. (DSM-V, 2014, p. 67).

Peretti (2009) descreve o transtorno da matemática, conhecido como Discalculia, como um problema causado por má formação neurológica, que se manifesta como uma dificuldade da criança em realizar operações matemáticas, classificar números e colocá-los em sequência. Para a autora, nas fases mais adiantadas da vida escolar, a Discalculia também impede a compreensão dos conceitos matemáticos e sua incorporação na vida cotidiana.

A Discalculia do desenvolvimento é um distúrbio que afeta as habilidades matemáticas, causado, provavelmente, por uma deficiência específica das funções cerebrais. Todas as pessoas podem, em algum momento e em qualquer situação de aprendizagem, apresentar determinada dificuldade. Por isso, é importante atentar-se aos “erros” apresentados pelos estudantes, uma vez que estes podem ser considerados “normais” e aceitáveis, como podem ser indícios de uma Discalculia ou outro transtorno da aprendizagem, cabendo uma investigação por parte de professores, pais e ou responsáveis. (DIAS; PEREIRA; BORSEL, 2011 apud NEVES; BORGES, 2019, p. 94).

Porém, Peretti (2009) ressalta que detectar o problema não é fácil. Para a autora, um dos maiores desafios enfrentados pelos educadores está em promover a aprendizagem de conhecimentos em alunos com dificuldades. O educando com pouca ou nenhuma motivação para aprender, mais cedo ou mais tarde, acaba fracassando nas escolas, adquirindo a marca de apresentar dificuldades de aprendizagem.

Sendo assim, Peretti (2009) aponta que alguns professores com pouca ou nenhuma expectativa com relação a esses alunos sentem-se pouco motivados para desenvolverem um ensino adequado, reforçando a possibilidade de fracasso.

Segundo Pimental; Lara (2017) o Brasil demorou desenvolver pesquisas envolvendo a discalculia. Somente em 2013 criou-se o Instituto do Cérebro do Rio Grande do Sul – INSCER, na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS, que produziu estudos com as crianças em fase de alfabetização, observando as mudanças que ocorrem na sua aprendizagem e no cérebro, o foco sendo mais o porquê algumas adquirem esse transtorno.

Portanto, este estudo se faz necessário para possibilitar a compreensão do que é a discalculia, sua influência no desenvolvimento infantil e a participação do docente de matemática neste contexto, a fim de trazer em pauta a importância do tema e possibilitar que o processo educativo seja mais inclusivo e que permita ao professor conhecer estratégias e ferramentas para que o processo de ensino- aprendizagem seja mais efetivo e que possibilite maior segurança na abordagem de estudantes com este transtorno.

O trabalho tem por objetivo possibilitar uma reflexão sobre o transtorno da Descalculia no desenvolvimento infantil e o papel do professor de matemática neste contexto. Além disso o estudo procurará identificar os aspectos do desenvolvimento humano envolvidos na discalculia; compreender o transtorno da

discalculia e quais aspectos mais afetados no desenvolvimento da criança; identificar as maiores dificuldades do corpo docente na compreensão do transtorno e identificar possíveis estratégias para o professor no processo de ensino-aprendizado do aluno com discalculia;

2 Desenvolvimento da criança e seu processo de aprendizado.

Para compreender a discalculia, é importante entender o funcionamento do cérebro durante o processamento matemático. Avila et al (2018) ressaltam que no caso da matemática, as áreas ativadas no cérebro são as parietais inferiores e o córtex pré-frontal. Os autores apontam que a área do córtex é a mesma utilizada para controlar os dedos, e segundo alguns pesquisadores tal fato se deve, provavelmente, aos antepassados que usavam os dedos em seus cálculos matemáticos.

A habilidade em matemática desenvolve-se desde os primeiros meses de vida, sendo possível o reconhecimento de pequenas quantidades numéricas por crianças de seis meses de idade. Porém, é no período operatório descrito por Piaget, no entanto, que a criança desenvolve o pensamento lógico-matemático (AVILA et al 2018).

Alguns requisitos são necessários para a aprendizagem adequada em matemática de crianças entre seis a doze anos:

- a) ter a capacidade de agrupar objetos de 10 em 10; b) ler e escrever de 0 a 99; c) saber a hora; d) resolver problemas com elementos desconhecidos; e) compreender meios e quartos; f) medir objetos; g) nomear o valor do dinheiro; h) medir volume; i) contar de 2 em 2, 5 em 5, 10 em 10; j) compreender números ordinais; l) completar problemas mentais simples; m) executar operações matemáticas básicas (BASTOS , 2006, p.199).

Já na fase adulta, de acordo com Bastos (2006), a habilidade em matemática deve incluir: leitura, escrita, produção e compreensão de números, conversão de números nesses formatos, realização de operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, além de resolução de problemas aritméticos.

O autor ainda afirma que ao longo do desenvolvimento humano, a pessoa pode apresentar algumas dificuldades, como: montagem das operações, reconhecer conjuntos numéricos, compreender os sinais, entender os princípios de medidas, classificar números, antecessor e sucessor entre outros.

A complexidade acerca do processamento matemático feita pelo cérebro fica evidente a partir da descrição dos mecanismos cognitivos envolvidos: a) processamento verbal e/ou gráfico da informação; b) percepção; c) reconhecimento e produção de números; d) representação número/símbolo; e) discriminação viso espacial; f) memória de curto e longo prazo; g) raciocínio sintático; h) atenção (BASTOS, 2006, p.195).

Para Ciasca (2003) apud Peretti (2009), o número de crianças identificadas com dificuldades ou transtornos para aprender é bastante alto. Para a autora alguns conseguem resolver com facilidade cálculos que utilizam diariamente, mas a grande dificuldade e desafio é colocar no papel o que fizeram mentalmente. A autora ainda destaca que algumas pessoas aprendem a desenvolver cálculos na escola, mas na prática, deparam-se com incertezas e inseguranças.

As dificuldades de aprendizagem podem ser divididas em primárias e secundárias. As primárias são aquelas cuja causa não pode ser atribuída a elementos psiconeurológicos bem estabelecidos ou esclarecidos, como os transtornos de leitura, da matemática, da expressão escrita, bem como os transtornos da linguagem falada. Quando percebe-se que o aluno possui uma alteração biológica específica e que a mesma está estabelecida, pode-se dizer que ele

possui uma dificuldade de aprendizagem secundária. Dentre estas, teriam as situações de dificuldade de aprendizagem consequentes de outros problemas perceptivos que afetam a discriminação, síntese, memória e relação espacial.

Para Peretti (2009) todas as crianças cometem erros, mas crianças com transtornos acabam cometendo muito mais erros do que o normal. A autora ressalta que os erros podem até não parecer tão diferentes do que se espera para o desenvolvimento infantil, mas crianças com alguns transtornos apresentam mais dificuldades em dominar as operações básicas, relacionar situações matemáticas com os problemas da vida diária, entre outros.

Novaes (2007) complementa que a real etiologia dos Transtornos de Aprendizagem ainda não foi esclarecida pelos cientistas, há uma suposição, segundo o autor de precedência de fatores biológicos, os quais interagem com fatores não biológicos.

Neste sentido, a discalculia é caracterizada, segundo Antunes (2003), como um distúrbio de aprendizagem, de causa neurológica.

Novaes (2007) esclarece que as dificuldades de aprendizagem, geralmente, não exigem práticas educativas especializadas por parte dos docentes, já os distúrbios são transtornos da Aprendizagem que originam-se a partir de distúrbios na interligação de informações em várias regiões do cérebro, os quais podem surgir durante o período de gestação e só será identificado quando a criança necessitar expressar suas habilidades intelectuais na fase escolar, necessitando de um diagnóstico com profissionais especializados.

3 Discalculia

Juntamente com outras disciplinas, para Muller (2011) a Matemática é uma das áreas do conhecimento que melhor responde as questões e necessidades do homem, ajudando-o a intervir no mundo que o rodeia. A autora esclarece as crianças e adolescentes não sentem preguiça como pais e professores pensam. Elas sentem dificuldade e/ou apresentam algum transtorno em compreender o que está sendo proposto. Dentre este transtorno está a discalculia.

A palavra discalculia vem do grego (dis, mal) e do Latin (calculare, contar) formando: contando mal. Essa palavra calculare vem, por sua vez, de cálculo, que significa o seixo ou um dos contadores em um ábaco (MULLER, 2011, p.14).

Para a autora, a discalculia é uma dificuldade para compreender e aprender matemática que não está associada a dificuldades gerais de aprendizagem – como as dificuldades de aprendizagem moderada, grave ou profunda – e, portanto, é considerada uma dificuldade de aprendizagem específica, além disso, pode manifestar-se nos primeiros anos de escolaridade.

Discalculia é uma condição que afeta a capacidade de adquirir habilidades matemáticas. Os aprendizes com discalculia podem ter dificuldades para compreender conceitos numéricos simples, não possuem compreensão intuitiva de números e têm problemas para aprender fatos e procedimentos numéricos. Mesmo que produzam a resposta correta ou usem o método correto, eles fazem isso mecanicamente e sem confiança (DFES,2001c apud MULLER, 2011, p. 13).

De acordo com Silva (2008), tem sido feitas tentativas para identificar e delinear os diferentes tipos de discalculia, que ampliam e suplementam as definições básicas, entre elas: a Discalculia

espacial relacionada as dificuldades de avaliação e organização visoespacial; a Anaritmia que envolve confusão em procedimentos aritméticos, como, por exemplo, misturar operações escritas, como adição, subtração e multiplicação; a Discalculia léxica (alexia) que refere-se à confusão diante da linguagem matemática e sua relação com símbolos (por exemplo, subtrair, retirar, deduzir, menos e “-“); a Discalculia gráfica (agrafia) que refere-se a dificuldades para escrever os símbolos e dígitos necessários para os cálculos e a Discalculia practográfica relaciona-se à deficiência na capacidade de manipular objetos concretos ou graficamente ilustrados. A criança tem dificuldades em aplicar na prática conhecimentos e procedimentos matemáticos. Ela pode não ser capaz de arranjar objetos em ordem de tamanho, comparar dois itens em relação ao tamanho ou afirmar quando dois itens são idênticos em tamanho e peso (SILVA, 2008).

Entre as causas mais prováveis da discalculia, Garcia (1998) apud Peretti (2009) apontam causas neurológicas associada a lesões no córtex cerebral; alguns déficits na memória, memória curta e reduzida, ou seja para os autores, alguns indivíduos que apresentam distúrbios na memória curta podem desenvolver discalculia; déficit cognitivo, com maior predisposição em indivíduos com Quociente de Inteligência de menos de 70; desordem hereditária ou congênita, podendo ter a combinação de dois ou mais dos fatores supracitados.

Bastos (2006) complementa que a discalculia apresenta-se de maneiras diversificadas em cada indivíduo, não podendo ser diagnosticada a partir de um único quadro sintomático.

Ciasca (2003) apud Bastos (2006) esclarece ainda que a discalculia, geralmente, manifesta-se com outros transtornos da aprendizagem, como o Transtorno da Leitura ou Transtorno da Expressão Escrita, ou seja, segundo o autor o sujeito pode apresentar dificuldades referentes às operações básicas de contagem, em virtude de as mesmas exigirem a compreensão de

enunciados de problemas matemáticos.

Peretti (2009) ressalta que a Discalculia é pouco conhecida entre os professores e por isso é necessário, cada vez mais, verificar de que forma esse transtorno interfere no processo da aprendizagem matemática nas crianças em fase escolar e por isso a necessidade de novos estudos nesta área.

Neste sentido, Muller (2011) destaca que é um grande desafio identificar, diagnosticar e fazer as intervenções necessárias na aprendizagem dos alunos quando não se tem domínio teórico dos problemas relacionados aos distúrbios de aprendizagem. A autora ressalta a importância de não se criar rótulos que condenam um aluno ao fracasso, diagnósticos equivocados com encaminhamento para tratamentos desnecessários e exclusão de oportunidades ao aluno de superar suas dificuldades.

Portanto, é preciso levar o tema para dentro da escola, não como assunto pontual, mas numa discussão permanente, contemplando as diversas dimensões da vida do aluno, como mais um instrumento para seu desenvolvimento integral, visto que as dificuldades de aprendizagem não têm como causa apenas um fator.

4 Os Professores e a Discalculia

Segundo Villar (2017) um dos maiores desafios enfrentados pela escola e professores, estão relacionados aos alunos que não aprendem. Para o autor, os educandos com pouca ou nenhuma motivação para aprender e que, futuramente, começam a fracassar diante dos conteúdos e demandas escolares, acabam por adquirir inúmeras dificuldades de aprendizagem e neste contexto, os professores mostram poucas expectativas com relação a esses alunos e se sentem pouco competentes para uma intervenção adequada (VILLAR, 2017).

De acordo Relvas (2011), dificuldades relacionadas à

escola, em relação às condições físicas do espaço ou à metodologia utilizada pelo professor, ou ainda relacionada à família, podem ocasionar certas dificuldades de aprendizagem por parte do estudante.

Para Muller (2011), um diagnóstico preciso para qualquer tipo de dificuldade de aprendizagem só é possível por meio de uma equipe especializada, voltada para as questões educacionais.

Neste aspecto Fragoso Neto (2007) apud Peretti (2009, p. 23) ressalta:

É preciso conscientizarmos e qualificarmos os professores para perceberem que um determinado grupo de crianças tem dificuldade em aprender matemática, que não são preguiçosas ou os pais que não se interessam, mas sim, que elas precisam de um diagnóstico, feito por uma equipe interdisciplinar, com ajuda de psicopedagogos, uma vez que envolve conhecimento amplo dos fatores que promovem a aprendizagem e uma visão multidisciplinar. Com a avaliação de psicopedagogos e neurologistas, chegamos ao diagnóstico, para começar o tratamento adequado, sendo necessário ter o cuidado para não rotular os indivíduos.

Peretti (2009) complementa que o professor realiza o primeiro diagnóstico e logo em seguida esse educador pede ajuda para outros profissionais, como médicos, para prescrever como será feito o tratamento, psicólogos, para acompanhar os comportamentos do aluno, pedagogos, orientando nas atividades para trabalhar com a criança. Dessa maneira, podem trabalhar de maneira mais eficaz para o desenvolvimento do estudante e facilitar a matemática.

Neste aspecto Muller (2011) ressalta que é preciso que o professor esteja atento aos questionamentos dos alunos, ou ausência de participação, bem como se a criança está interagindo, dispersa ou por que não está aprendendo, de modo que estas observações ao final de um determinado período contribuam para

a confecção de um diagnóstico, e essas crianças possam ser encaminhadas à profissionais especializados.

Peretti (2009) afirma que o diálogo do professor, aluno e seus pais são essenciais e fortalecem estas observações e contribuem para identificar aspectos deficitários do desenvolvimento da criança. Os pais quando informados sobre as dificuldades de seus filhos podem colaborar com as atividades e amenizar as causas das dificuldades, potencializando seu desenvolvimento.

Segundo Garcia (1998) apud Peretti (2009) é importante para a criança ter um professor que se preocupa com os aspectos educacionais da turma e com as dificuldades específicas de cada criança, possibilitando uma aprendizagem mais tranquila e com maior entendimento de cada aluno.

O professor, para melhor resultado e desempenho com seus alunos, deve sempre manter sua formação atualizada e criar intervenções no ambiente escolar, resultando no aprender de todos, em busca constante de crescimento dos alunos (SILVA; CAPISTRANO; GONÇALVES, 2010).

A construção de um programa que seja eficaz é de grande importância para explicar as dificuldades da criança para os pais ou responsáveis para que possam acompanhar e atender as necessidades esperadas no tratamento (PERETTI, 2009).

Muller (2011) ressalta que além deste olhar ampliado sobre as dificuldades, tão importante são construir estratégias que podem estimular o processo de aprendizado da matemática. A autora afirma que jogos com utilização de materiais de fácil acesso (garrafas pets, madeiras, fitas, entre outros), trabalhando a coordenação manual fortalece o aprendizado e desenvolvimento, uma vez que parece ser a forma como o cérebro busca trabalhar os símbolos matemáticos.

Jogo matemático é importante para ativar os aspectos motores da criança, dessa maneira, parte do princípio que brincando pode-se aprender e as elas podem conhecer o mundo em sua volta, assimilando experiências e informações. O mais importante saber quando a criança crescer e incorporar as atitudes desenvolvidas possibilitando na busca de meio pela exploração atuando como aliados fundamentais na construção do saber (MULLER, 2011, p. 28).

Peretti (2009) complementa que o computador consegue chamar bastante à atenção dos alunos e, com isso, este instrumento pode ser bem aproveitado pelo professor, utilizando jogos educativos envolvendo os cálculos, formas geométricas, entre outros. (PERETTI, 2009).

O diagnóstico, bem como as intervenções, a fim de reabilitar os sujeitos com transtornos de aprendizagem, são tarefas complexas, tendo em vista a heterogeneidade e as comorbidades relacionadas a estes transtornos. Neste sentido, os autores ressaltam a importância do trabalho de uma equipe multidisciplinar, para avaliar cada caso de forma específica, evitando um diagnóstico pouco consistente e epidêmico. Além disso, é preciso pensar processos de inclusão pertinentes nesse processo de acolhimento escolar ao aluno discalculico (AVILA et. al., 2018, p.54).

Portanto, os autores ressaltam que é importante que as instituições estejam preparadas para receber esses os alunos que trilham um caminho menos comum para o manuseio da matemática. Oferecer ferramentas, possibilidades, meios para que essas pessoas possam aprender da melhor forma possível é fundamental para que a inclusão aconteça e saiba identificar o que é da ordem orgânica e o que é da ordem da dificuldade possibilita que o professor possa intervir de uma maneira mais eficaz frente a esse aluno.

5 Considerações Finais

O termo de transtorno de aprendizagem foi surgir somente em 1963, nos Estados Unidos, pelo fato dos pais de uma criança notar dificuldades frequentes em sua leitura. Depois de anos, foi preciso construir um ambiente para trabalhar os transtornos, estudar mais sobre a discalculia e o mais importante, formar profissionais dispostos a ensinar matemática e conhecer o distúrbio discalcúlico.

Os primeiros centros para a ajuda das crianças com transtornos específicos foram fundados na Europa, por uma direção médica e pedagógica. Na década de setenta, desenvolveu-se a primeira associação Nacional para Crianças com Dificuldades de Aprendizagem, mas esse centro era focado somente no distúrbio dislexo.

O estudo para a discalculia não era reconhecida pelos professores de matemática, sendo assim, nas escolas era conhecido apenas a dislexia, dificuldade com a leitura e escrita. O termo discalculia foi identificado e explicado posteriormente e relacionado com a dificuldade do aluno com símbolos.

Em virtude dos aspectos estudados, foi possível compreender que a discalculia vem sendo conhecida com o passar do tempo, muitos profissionais da educação da matemática sofrem dificuldades com determinados alunos que não conseguem aprender a matéria e determinado conteúdo.

Uma das dificuldades enfrentadas pelos estudantes com este transtorno, na Escola atual, é a falta de preparo de professores, estrutura escolar, metodologia de ensino e outras. Muitos professores e escolas já acostumaram com a metodologia tradicional e apresentam fragilidades ao preparem aulas com metodologia e materiais levando em conta a diversidade dos processos de aprendizagem e a singularidade do desenvolvimento de cada criança.

Atualmente, os estudantes necessitam de materiais

mais interativos para melhor compreensão do conteúdo aplicado, principalmente aqueles que apresentam alguma dificuldade ou transtorno. Para isso é preciso que o professor, a escola e família busquem alternativas, estratégias, recursos em conjunto para que consigam atingir os objetivos educacionais propostos em cada etapa.

Importante que o professor não se sinta sozinho e busque apoio na própria equipe e dialogue com a família para buscar o melhor aproveitamento do aprendizado da criança.

Portanto, conclui-se a importância de educadores conhecerem a discalculia profundamente, buscarem ampliar seus conhecimentos na área, e buscar conhecer os possíveis tratamentos, dialogar com os centros de cuidados para estes distúrbios, trabalhar equipe multidisciplinar e buscar apoio especializado sempre que observar e perceber o desenvolvimento do estudante aquém do esperado para sua faixa etária. Para tanto, é preciso que os professores olhem além dos números e das equações, olhem para as crianças e seu desenvolvimento em todas as suas dimensões e contexto, conseguindo, assim desenvolver uma educação qualificada.

6 Referências

ANTUNES, C. *A dimensão de uma mudança: atenção, criatividade, disciplina, distúrbios de aprendizagem, propostas e projetos*. São Paulo: Papirus, 2003.

ASSOCIAÇÃO PSIQUIÁTRICA AMERICANA. *Manual Diagnóstico e Estatístico de Transtornos Mentais* (5^a ed.). Arlington, VA: American Psychiatric Publishing, 2014. Disponível em: <http://neuroconecta.com.br/wp-content/uploads/2019/01/DSM-5-portugues.-pdf.pdf>. Acesso em: 05 mar 2022.

AVILA, A. A. H. S et al. Discalculia e Aprendizagem: um olhar psicopedagógico. *Revista Conhecimento Online*, v. 3, ed. especial: out. 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.25112/rco.v3i0.1609>. Acesso em 22 mar. 2022.

BASTOS, J. A. *Discalculia: transtorno específico da habilidade em matemática*. In: ROTTA, Newra Tellechea. Transtornos de aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2006.

FERREIRA, M. C.C; FERREIRA, J. R. *Sobre Inclusão, políticas públicas e práticas pedagógicas*. In: GOES, M. C. R; LEPLANE, A. L. F (Orgs). Políticas e práticas de educação inclusive. Campinas-SP: Autores Associados, 2004.

MULLER, I. A. *Discalculia: uma dificuldade na aprendizagem matemática*. Monografia (Especialização em Desenvolvimento Humano, Educação e Inclusão Escolar) Universidade de Brasília, 2011. Disponível em: https://bdm.unb.br/bitstream/10483/2357/1/2011_IraniAparecidaMuller.pdf. Acesso em: 20 fev. 2022.

NEVES, R.S.P.; BORGES, M. J. G. *Discalculia e Aprendizagem Matemática no quarto ano do Ensino Fundamental: algumas compreensões*. *RPEM*, Campo Mourão, PR, v.8, n.16, p.27-47, jul.-dez. 2019. Disponível em: DOI:10.33871/22385800.2019.8.16.27-47. Acesso em: 20 fev 2022.

NOVAES, M. A. F. *Transtornos de aprendizagem*. 2007. Disponível em: www.plenamente.com.br/diagnosticos7.htm. Acesso em: 17 abr. 2022.

PERETTI, L. *Discalculia – transtorno de aprendizagem*. Monografia (Curso de Graduação em Matemática) Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – URI – Campus de Erechim, 2009. Disponível em: https://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/1020.pdf. Acesso em: 05 mar 2022.

PIMENTEL, L. S; LARA, I. C. M. *Discalculia: o Cérebro e as Habilidades Matemáticas*. *Anais do VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática*, Brasil, 2017. Disponível em: https://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/11591/2/Discalculia_o_cerebro_e_as_habilidades_Matematicas.pdf. Acesso em: 15 abr 2022.

RELVAS, M. P. *Neurociência e transtornos de aprendizagem: as múltiplas eficiências para uma Educação Inclusiva*. Rio de Janeiro: Wak Ed., 2011.

SILVA, W. C. *Discalculia: Uma abordagem à lua da Educação Matemática*. Relatório Final (Projeto de Iniciação Científica) - Universidade Guarulhos, Guarulhos, 2008. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Silva.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.

SILVA, R. O. CAPISTRANO, R. P.; GONÇALVES, F. E. *Dinamização*

da Prática Pedagógica no Ensino de Geografia. HOLOS, ano 26, v. 5, 2010. Disponível em: <https://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/download/569/398/1676>. Acesso em: 15 jun. 2022.

VILLAR, J. M. G. Discalculia na sala de aula de matemática: um estudo de caso de dois estudantes. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2017. Disponível em: <http://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/5804/1/josemarceloguimaraesvillar.pdf>. Acesso em: 05 mar 2022.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA: a presença da disciplina Matemática Financeira nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)

Letícia Neves Lima Ferreira
Licencianda em Matemática – Uni-FACEF
3737leticia@gmail.com

Lucas Marques Oliveira
Licenciando em Matemática – Uni-FACEF
lucasmарques123456@hotmail.com

Silvio Carvalho Neto
Doutor em Ciências – Uni-FACEF
silvio@facef.br

Resumo: O trabalho em questão tem como tema principal a matemática financeira, um assunto muito tratado nos últimos anos dada importância que a educação financeira tem ganhado, no que concerne a tomada de decisões conscientes e coerentes em assuntos cotidianos que envolvem questões financeiras. Com esses pensamentos o objetivo é apresentar a relação entre matemática financeira e educação destacando a sua presença nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e como esses conteúdos podem ser vistos no cotidiano dos alunos, tornando a aprendizagem ainda mais significativa. Para tanto foi adotada como metodologia a pesquisa bibliográfica, que foi realizada a partir de materiais já publicados em bases de dados eletrônicas como o Google Acadêmico e o Scielo, a partir das palavras chave Matemática Financeira e Educação Financeira. Com a pesquisa foi possível observar que, atualmente, existem escolas que já têm adotado o ensino de educação financeira como forma de preparar os alunos para lidar com situações que envolvem a matemática, no seu dia a dia.

Palavras Chave: Educação. Ensino. Finanças. Matemática.

1 Introdução

Independente do cenário econômico em que se vive, seja ele em expansão ou em retração, considera-se importante que as pessoas, no sentido geral, tenham conhecimento acerca de conceitos e aspectos financeiros, ainda que sejam básicos, para

que possam investir em cenários oportunos ou até mesmo fazer uso consciente do capital que possuem (SANTOS et al, 2021).

Considera-se, conforme aponta Rezende, Silva-Salse e Carrasco (2022), que a matemática financeira é um importante instrumento de auxílio no que se refere à tomada de decisões pessoais ou profissionais que são relacionadas a compras parceladas ou a vista, investimentos, e outras escolhas que são postas diariamente à qualquer indivíduo.

No ensino, o que se observa, segundo Rezende, Silva-Salse e Carrasco (2022) é que os alunos não fazem uso consciente de procedimentos que envolvem a matemática financeira, apresentando dificuldades em avaliar e utilizar procedimentos matemáticos eficientes. Nesse sentido destaca-se que é relevante os alunos terem conhecimento sobre a matemática financeira, para que possam aplica-los quando necessidade dos mesmos no seu dia a dia.

Em pesquisa desenvolvida pelo Banco Central (BC) em conjunto com a Serasa *Experian* e o Instituto Brasileiro de Opinião Pública e Estatística (IBOPE) foi aferido o nível de educação financeira e comportamento financeiro da população brasileira. Os resultados dessa pesquisa apontaram que há uma ausência de conhecimentos básicos, como juros simples e compostos, valor do dinheiro no tempo e juros de empréstimos, além disso, com relação ao comportamento, os brasileiros em maioria não tem o hábito de poupar, o que demonstra pouco preparo financeiro (BCB, 2021).

Os resultados do estudo apontaram que é de grande importância que os indivíduos construam conhecimentos acerca da Matemática Financeira desde mais novos, e nesse sentido a inserção desse conteúdo, na Base Nacional Curricular Comum (BNCC) e nos currículos da Educação Básica, tem o papel de auxiliar os estudantes no planejamento, administração de renda, economias e realização de investimentos com a finalidade de ter uma vida financeira segura (RIBEIRO; COSTA, 2022).

Segundo Rezende, Silva-Salse e Carrasco (2022) quando um indivíduo tem conteúdo e conhecimento sobre Matemática Financeira ele consegue discernir quando e como ela pode ser utilizada para solucionar os problemas diários e passa a ser assim educado financeiramente, porém, ela não é suficiente. É importante que os alunos também desenvolvam a criticidade, sabendo lidar com as questões cotidianas que envolvem conhecimentos financeiros.

É com base nesses pensamentos que o trabalho em questão foi desenvolvido buscando responder a seguinte questão problema: Qual a importância do ensino de matemática financeira?

De acordo com Ribeiro e Costa (2022), a Matemática Financeira é uma ferramenta muito importante para desenvolver a educação financeira e também o pensamento crítico, permitindo que, de forma reflexiva, os alunos possam compreender a ligação lógica entre as ideias, desenvolvendo a habilidade de pensar com racionalidade diante as situações diárias.

Dessa forma o trabalho tem como objetivo geral apresentar a relação entre matemática financeira e educação destacando a sua presença nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e como esses conteúdos podem ser vistos no cotidiano dos alunos, tornando a aprendizagem ainda mais significativa. Além disso, tem como objetivos específicos apresentar aspectos teóricos que envolvem a matemática moderna e a matemática financeira, destacando essa última no cotidiano dos alunos e como ela pode ser trabalhada na educação.

Para alcançar os objetivos propostos foi adotada como metodologia para o desenvolvimento do trabalho a pesquisa bibliográfica, que foi desenvolvida a partir de publicações disponibilizadas em bases de dados eletrônicas. Por meio dessas foi possível realizar um levantamento de artigos já publicados sobre o tema e assim desenvolver o trabalho.

Primeiramente foi abordado sobre a matemática financeira e tratou sobre alguns dos seus conceitos básicos. Posteriormente,

apresentou-se a matemática financeira e a sua relação com a educação e os PCNs. E por fim, o uso da matemática financeira no dia a dia, destacando assim a aplicação dos conteúdos escolares e sua relevância para o cotidiano dos alunos.

2 O ensino de matemática

De maneira geral o ensino de matemática é visto pela comunidade escolar como sendo um desafio, pois a matemática ensinada nas salas de aula ainda acontece de forma tradicional, e assim é desvinculada daquela que é utilizada no dia a dia pelos indivíduos, o que acaba por fazer com que o ensino não seja atrativo (ANDRADE, 2013).

A alfabetização matemática pode ser considerada um conjunto de competências que permite que os alunos se envolvam com processos de construção de modelos matemáticos, preocupando-se com os resultados na sociedade fora da escola e compreendendo a linguagem matemática presente nas mais diversas dimensões sociais (RAMOS, 2017).

Assim, um dos objetivos da matemática e do seu ensino na atualidade, deve ser a preparação do aluno para estudar o conteúdo determinado a partir da sua aplicação no dia a dia, porém, na realidade, nem todas as instituições de ensino garantem que isso seja devidamente acometido, buscando apenas transmitir os conteúdos sem qualquer relação com o cotidiano (ARAÚJO, 2015).

A matemática interfere muito na formação intelectual e social dos indivíduos, pois, é uma disciplina muito relevante para todos. Assim, torna-se importante que o seu ensino assuma um compromisso social com o educando e com o contexto social no qual o mesmo está inserido (CHAGAS, 2016).

Segundo Fagundo (2017) é um consenso que a disciplina de Matemática é difícil e complexa, tanto para aprender quanto para ensinar, porém, os motivos para tal fato são diversos, dentre os

quais pode-se destacar a formação deficitária dos docentes, a falta de infraestrutura das instituições de ensino, alunos desmotivados e, questões relacionadas ao currículo escolar.

Porém, existem diversas soluções que podem ser adotadas para que esses problemas sejam sanados, no entanto, a implementação de novas ideias relacionadas ao ensino de tal conteúdo é algo que deve ser analisado e adotado conforme a necessidade de cada instituição escolar.

O desenvolvimento e o aprimoramento das questões matemáticas e suas noções aconteceram de maneira gradual com o passar do tempo, algo que pode ser relacionado à constante criação e recriação da matemática, em conformidade com as necessidades de cada período pelo qual o ensino dessa disciplina passou, ao longo dos anos (ANDRADE, 2013).

A história da matemática, em si, é um excelente instrumento para ser usado na melhoria do processo de ensino e aprendizagem da mesma, por meio dela é possível compreender e considerar todas as suas alterações facilitando a compreensão para os alunos e despertando sua curiosidade e interesses nas aulas e futuras pesquisas a serem realizadas na área (ANDRADE, 2013).

A matemática, segundo Gomes (2012), é um reflexo das transformações sociais, ou seja, ela molda a si mesma para satisfazer as necessidades daquele momento, e da situação onde está sendo ministrada, o que demonstra o quão importante a mesma é para aquisição de conhecimentos tanto a respeito da disciplina quanto do modo que a mesma é utilizada no cotidiano.

O ensino atual de matemática busca, de acordo com Andrade (2013), trabalhar o formalismo das regras, das fórmulas e dos algoritmos, assim como a complexidade dos cálculos juntamente com o seu caráter rígido e disciplinador, levando a exatidão e precisão dos resultados.

Ainda nos dias atuais o ensino de matemática é baseado no método tradicional, por meio do uso de aulas expositivas, onde

o professor reproduz os conteúdos para a lousa, resumindo aquilo que considera importante que os alunos aprendam. Nesse modelo de ensino o aluno apenas faz cópias dos conteúdos que estão dispostos no quadro, tentando resolver os exercícios, como se fosse uma cópia (ANDRADE, 2013).

A prática tradicional no ensino de matemática revela que é possível aprender matemática por meio de um processo que envolve somente a transmissão dos conhecimentos, porém, para que o processo de ensino e aprendizagem exista e seja eficaz estratégias metodológicas de ensino diferenciadas devem ser adotadas, as quais sejam consideradas atrativas e possibilitem uma melhoria na aprendizagem dos educandos.

3 Matemática financeira: conceitos básicos

Historicamente, a matemática financeira sempre esteve muito ligada ao conceito e ao significado de comércio, visto que antigamente a troca direta de mercadorias eram realizadas para suprir as necessidades fundamentais dos membros de um grupo, porém, com o passar do tempo dificuldades surgiram e assim foi inventada a moeda de troca, como forma de pagar por produtos a serem permutados (CARRARA, 2018).

A partir daí e da invenção de novas formas de trocas e de compras de produtos, como o ouro e a prata, passaram a surgir alguns conceitos que já eram relacionados à matemática financeira, como lucro, ganho e os juros, e assim, ainda que de forma rudimentar foram consideradas as primeiras operações de crédito, e o próprio comércio com o passar dos anos apresentou a necessidade na criação de uma rede bancária mais vasta, e a partir daí o crescimento da atividade comercial também fez com que fossem desenvolvidos conceitos matemáticos ao longo dos anos (CARRARA, 2018).

Nesse sentido é importante destacar que:

Acredita-se que a classificação de comercial ou financeira esteja mesmo ligada à forma de resolução dos problemas. Os cálculos relacionados à utilização de fórmulas matemáticas, porcentagens, juros e descontos simples, por exemplo, estão mais próximos do conceito de comércio; os cálculos de juros compostos, séries de pagamentos, amortizações de empréstimos bancários são entendidos como financeiros, pois, em geral, utilizam-se calculadoras financeiras para a solução dos problemas apresentados (CARRARA, 2018, p.16).

De acordo com Santos et al (2022), a matemática financeira pode ser considerada como sendo o uso de procedimentos e de conceitos matemáticos para solucionar questões financeiras, utilizando alguns recursos como por exemplo: funções, potência, estatística e probabilidade, fatores econômicos e financeiros, entre outros.

Durante um período o conhecimento sobre matemática financeira foi limitado aqueles que possuíam domínio sobre conteúdos e conceitos da matemática, fato que restringia à muitos cidadãos e profissionais esse recurso. Porém, com o passar do tempo essa questão foi sendo modificada, e mais pessoas passaram a deter esse conhecimento como forma de aplica-los a diferentes áreas de atuação (SANTOS et al, 2022).

Ferreira e Santos (2019) apontam que a matemática financeira, quando utilizada, permite que sejam desenvolvidas diversas habilidades, destacando-se a aquisição de ações que visem criar “hábitos, valores, tomadas de atitudes, conhecimento e aplicação de técnicas de gestão pessoal das finanças (p.5), além disso também pode-se desenvolver ações que envolvem orientação familiar, formação religiosa, experiência de vida, educação escolar básica entre outros.

Nos dias mais atuais aprender matemática financeira se tornou algo mais viável e prático em função da facilidade que é vista nos recursos tecnológicos, que descomplicaram o ensino

e a aprendizagem, facilitando o estudo e a aplicação prática dos conceitos. Com isso a matemática financeira tem se tornado algo que a maioria da população pode aprender, mesmo que anteriormente não tenham aprendido algo relacionado às questões matemáticas ou financeiras (SILVA et al, 2019).

Dada importância da matemática financeira destaca-se que:

[...] ela se torna fundamental para a rotina e processos no trabalho de diversos profissionais, principalmente na rotina de gestores, supervisores, analistas e técnicos, que necessitam de tal conhecimento para realizar as tomadas de decisões cotidianas. O conhecimento adequado da matemática financeira tem um valor muito grande para mais bem tomadas de decisões e, quando aplicado de forma oportuna e adequada, possibilita que as empresas tenham rendimentos maiores, melhorando assim os resultados obtidos (SANTOS et al, 2022, p.89).

O conhecimento sobre matemática financeira pode ser aplicado tanto nas organizações quanto de forma individual. E saber lidar com as oportunidades e os riscos do mercado, é algo fundamental, assim o conhecimento sobre matemática financeira é um ótimo recurso para tomar decisões em cenários que muitas vezes são imprevisíveis (RIBEIRO; COSTA, 2022).

Por meio do conhecimento na matemática financeira é possível assim aplicá-la de forma coerente, e assim tomada de decisões podem ser feitas de forma mais adequada, possibilitando diversos benefícios, tanto no ramo empresarial quanto no que concerne ao seu uso no dia a dia dos indivíduos (SILVA; VICENTE; CARDOSO, 2019). Sobre o uso da matemática financeira no âmbito individual, os autores Visentini e Weingartner (2018) apontam que:

[...] a educação financeira pode auxiliar crianças e adolescentes a compreender melhor o valor do dinheiro e ensiná-los o melhor meio de economizar, investir

e planejar seus gastos. Isso pode dar aos jovens importantes habilidades para uma vida independente. Também importante é a presença do domínio desse assunto em jovens adultos, os quais certamente depois de (re) educados financeiramente irão deter conhecimentos necessários para tomada de decisões que irão influenciá-los positivamente pelo resto de suas vidas, como na hora de adquirir a casa própria, abrir um negócio ou decidir começar uma família e se tornarem pais (VISENTINI E WEINGARTNER, 2018, p. 84).

Dessa forma conhecer a matemática financeira é algo importante para todas as pessoas pois questões cotidianas também podem envolver o conhecimento sobre esse assunto, como emprestar ou não dinheiro a um amigo, determinar o valor, o tempo de empréstimo, a decisão entre comprar ou não um produto a vista ou parcelado, controle financeiro de gastos mensais, entre outros. Nesse sentido Silva, Vicente e Cardoso (2019) destacam que:

A alfabetização financeira dos indivíduos de baixa renda tem-se tornado cada vez mais importante para a melhoria de políticas públicas e sociais, uma vez que indivíduos mais conscientes têm tomadas de decisões financeiras melhores, evitando o endividamento, controlando melhor os seus gastos e, conseqüentemente, contribuindo para o desenvolvimento da economia (SILVA, VICENTE E CARDOSO, 2019, p. 4).

Dessa forma o ensino da educação financeira permite que estudante possam dimensionar mais conhecimentos econômicos. E assim, a adoção de programas educacionais nesse sentido podem aprimorar a capacidade dos cidadãos em gerenciar as suas finanças pessoais diárias, influenciando e impactando diretamente o seu futuro (SILVA et al, 2017). E assim, para iniciar a compreensão de conhecimentos ainda que superficiais sobre a matemática financeira é importante compreender conceitos e elementos introdutórios da área, os quais podem ser vistos no Quadro 1 a

seguir de forma explicativa.

Quadro 1 - Conceitos básicos da matemática financeira

Termo	Conceito
Valor presente (Capital)	é o valor inicial a ser investido através de determinada aplicação financeira. O valor presente também pode ser chamado de: presente valor; valor atual; principal; capital; capital inicial; valor aplicado; dentre outros
Valor futuro (Montante)	é o valor resultante da soma do capital com os juros, ou seja, é o resultado do investimento realizado do valor presente ao longo do tempo em função de determinada taxa de juros. O valor futuro também pode ser chamado de: futuro valor; montante; montante final; valor de resgate; dentre outros.
Juros	é o elemento que uma pessoa ou empresa paga por realizar um empréstimo de determinado valor de dinheiro de outra pessoa ou empresa, durante prazo de tempo estabelecido. Por outro lado, juros também podem ser o elemento que uma pessoa ou empresa pode receber por emprestar um determinado valor de dinheiro a outra pessoa ou empresa, durante prazo estabelecido.
Taxa de juros	a taxa de juros pode ser considerada a unidade de medida dos juros, ou seja, ela indica a remuneração que será paga pelo capital empregado durante determinado período. A taxa de juros deve ser pautada por um período, que pode ser em dias, semanas, meses, bimestres, trimestres, semestres, anos, dentre outros
Tempo (Prazo)	o termo "tempo" ou "prazo" deve ser considerado como a quantidade de períodos em que determinado valor ficará investido, devendo ser iguais e contínuos. É o intervalo de tempo entre o início de determinada atividade financeira e o seu fim. Os períodos podem ser contados em dias, semanas, meses, bimestres, trimestres, semestres, anos, dentre outros
Regimes de capitalização	são processos pelos quais são formados os juros. A capitalização, deste modo, é a aplicação de um capital (C) a uma determinada taxa de juros (i), durante determinado período (n), que resultará em determinados juros (J). O regime de capitalização depende do processo de cálculo que será empregado. Existem dois regimes de capitalização: o simples e o composto. Na prática, o regime de capitalização simples tem aplicações bem limitadas, enquanto o regime de capitalização composto é amplamente empregado na matemática financeira
Juros simples	no sistema capitalização de juros simples, o cálculo é feito de forma que os juros de cada intervalo de tempo são gerados em função do capital inicial investido e, com isso, os juros recebidos são idênticos caso a taxa de juros seja constante.
Juros compostos	no sistema capitalização de juros compostos, a taxa de juros é aplicada no capital atualizado do período anterior, ou seja: no final de cada período de capitalização de juros, são inseridos os juros adquiridos sobre o montante do tempo anterior

Fonte: Santos et al, 2021.

A partir de conhecimentos simples e conceitos básicos que fazem parte da matemática financeira uma pessoa pode assim adota-los de forma prática no seu cotidiano, se tornando educado financeiramente, porém, é importante lembrar que para tanto as escolas hoje, em pequena parcela, tem aderido à educação financeira e com base nesse pensamento o trabalho a seguir irá

tratar sobre a matemática financeira na educação apresentando sua ligação com os PCNs.

4 Matemática financeira na educação

No âmbito escolar proporcionar o ensino da Matemática Financeira é algo essencial para fortalecer a cidadania. Ainda que isso não esteja presente nos PCNs, está incluso nas Orientações Educacionais Complementares aos PCN (PCN+). Nesses documentos, a matemática financeira e a educação financeira são expressas da seguinte forma respectivamente:

[...]especialmente para jovens de famílias economicamente marginalizadas ou apartadas de participação social, a escola de ensino médio pode constituir uma oportunidade única de orientação para a vida comunitária e política, econômica e financeira, cultural e desportiva. (BRASIL, 2006, p.12)

[...]Álgebra, na vivência cotidiana se apresenta com enorme importância enquanto linguagem, como na variedade de gráficos presentes diariamente nos noticiários e jornais, e também enquanto instrumento de cálculos de natureza financeira e prática, em geral. (BRASIL, 2006, p.120)

Além disso o documento também aponta que:

[...] O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. (BRASIL, 2006, p.121)

A partir da oficialização da Base Nacional Curricular Comum (BNCC) e a definição das aprendizagens para assegurar que os estudantes desenvolvam as dez competências gerais durante a Educação Básica, é importante considerar o estudo de conceitos básicos que envolvem a economia e finanças, visando educar os alunos financeiramente (BRASIL, 2018).

A BNCC prevê que o estudo que visa a educação financeira é desenvolvido a partir dos temas transversais, porém, é na matemática que os conceitos básicos devem ser desenvolvidos proporcionando discutir assuntos como por exemplo taxa de juros, juros simples e compostos, bem como aplicações financeiras (BRASIL, 2018).

Assim com base na BCC o tema da educação financeira

[...] favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro. É possível, por exemplo, desenvolver um projeto com a História, visando ao estudo do dinheiro e sua função na sociedade, da relação entre dinheiro e tempo, dos impostos em sociedades diversas, do consumo em diferentes momentos históricos, incluindo estratégias atuais de marketing. Essas questões, além de promover o desenvolvimento de competências pessoais e sociais dos alunos, podem se constituir em excelentes contextos para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira e, também proporcionar contextos para ampliar e aprofundar esses conceitos. (BRASIL, 2018, p.269)

Assim é apresentada a possibilidade de integrar as disciplinas e promover ações e relações entre a matemática financeira com elas, permitindo assim a construção e aperfeiçoamento dos conceitos e das competências que são relacionadas à educação financeira (RIBEIRO; COSTA, 2022).

Na BNCC temáticas como por exemplo a educação financeira é visto como componente curricular para desenvolver

habilidades que são de competência do sistema de ensino e das escolas em conformidade com as peculiaridades, abordando os assuntos de forma contextualizada (BRASIL, 2018).

Especificamente sobre essas habilidades é importante citar que elas são idênticas ao Currículo Paulista e na BNCC, sendo feitas por meio de um código alfanumérico, como pode ser visto na Figura 1.

Figura 1 - Código alfanumérico de identificação da habilidade



Fonte: Adaptado de BNCC (2018).

O primeiro par de letras indica a etapa de ensino que o aluno se encontra, o primeiro par de números à habilidade descrita à ser desenvolvida. A segunda sequencia de letras indica a área ou o componente curricular que será trabalhado.

4.1 Matemática financeira no dia a dia: juros simples e juros compostos

O ensino de matemática cada dia mais tem sido alvo de necessidades de mudanças no modelo de ensino e na metodologia adotada. Mundialmente a educação matemática é vista como uma área de conhecimento das ciências sociais e humanas que

tem interlocução com a pedagogia, antropologia e outras, além da matemática, em si (AZAMBUJA, 2013).

A matemática voltada para o ensino cotidiano é um agente potencializador do ensino e aprendizagem da disciplina, sendo considerado um elemento indispensável ao processo pedagógico, podendo auxiliar os alunos na aprendizagem da disciplina de forma eficiente, levando-os a aproximar o conteúdo ministrado da sua realidade e assim garantir sua aprendizagem.

Não há como negar que a matemática faz parte da vida de todos os indivíduos e auxilia os mesmos na resolução de diversos conflitos e situações que surgem no dia a dia. Em muitos casos as relações sociais são interceptadas e envolvem conceitos matemáticos, uma vez que cálculos sempre estão presentes em algumas situações do dia a dia (CONCEIÇÃO et al, 2016).

Segundo Silva (2020) todos vivem fazendo cálculos, como por exemplo, a primeira ação tomada ao acordar é ver as horas. Sempre que se deseja fazer alguma receita utiliza-se medidas, entre diversos outros acontecimentos que fazem o uso de conceitos matemáticos diariamente.

Observa-se, nesse sentido, que a matemática proporciona uma variedade de informações aos indivíduos, e atende a diversos objetivos diferentes, algo que deve ser estimulado durante a troca de conhecimentos entre professores e alunos, levando-os a reconhecer habilidades e expectativas, onde se gera motivações para que os alunos possam ampliar seus conhecimentos e tornar os conteúdos matemáticos, algo que faça parte do seu cotidiano.

Segundo Cunha (2017) quando a matemática é utilizada no dia a dia para facilitar a vida do ser humano os conteúdos ministrados em sala de aula podem contribuir para sua aprendizagem no ambiente escolar. Assim a matemática em si, não deve ser vista somente como um pré-requisito para estudos posteriores, é importante que o seu ensino esteja voltado para a formação do aluno como cidadão, que utiliza cada vez mais conceitos matemáticos

junto à sua rotina.

Existem diversas formas de se aplicar os conteúdos matemáticos no cotidiano, que os professores podem transmitir aos alunos em sala de aula. Quando o professor transmite esses conhecimentos aos alunos, os mesmos conseguem aproximar os conteúdos da sua própria realidade, o que reflete numa aprendizagem mais significativa, estimulando assim o seu raciocínio lógico (CUNHA, 2017).

Segundo os PCNs, é importante que os alunos:

[...] saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p. 69).

Dessa forma os professores devem buscar meios de proporcionar a ligação dos conteúdos matemáticos com atitudes tomadas pelos alunos no seu cotidiano. O cotidiano, segundo Cunha (2017), está impregnado de saberes, a todo instante os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, e de alguma forma avaliando e usando instrumentos que fazem parte de sua própria cultura.

Assim considera-se que a matemática, como uma ciência, é fundamental para a vida de todos, pois ela permite que o pensamento seja colocado em prática, criando nos indivíduos um senso crítico, trabalhando o raciocínio junto as tarefas que são realizadas diariamente.

Cantanante e Araújo (2014) destacam que quando se valoriza o cotidiano dos alunos no ambiente escolar é possível levar aos alunos uma reflexão sobre os limites do seu próprio

conhecimento, assim como da dimensão prático-utilitária para a apreensão dos conceitos matemáticos elaborados em sua máxima potencialidade.

Segundo Conceição et al (2016) é possível que, por meio do uso do cotidiano no ensino de matemática os alunos e professores superem as suas dificuldades encontradas no ensino da disciplina e dos seus conteúdos, não somente dentro da escola, mas também dentro de sua casa, do trabalho e da vida social de todos que estão envolvidos no seu meio.

Considera-se que o conhecimento matemático é um dos degraus para a ascensão social, e a escola é a principal responsável pela sua aquisição e sua construção. Assim é importante que a escola esteja apta a transmitir esses conteúdos de forma satisfatória aos alunos, e garantir a sua aprendizagem de forma eficaz, e por meio do uso do cotidiano no ensino de matemática, isso é de fato possível (GONÇALVES e POZZOBON, 2016).

Dessa forma diversas práticas pedagógicas podem ser adotadas e cabe aos professores e a escola, em si, considerar meios de levar o cotidiano para o ambiente da sala de aula, visando garantir assim a aprendizagem e o desenvolvimento de forma eficaz a todos os alunos, levando-os a enxergarem a matemática não como uma dificuldade, mas sim como algo satisfatório.

Especificamente o trabalho com juros é algo que pode ser aplicado diariamente e assim compete que os alunos aprendam tais assuntos de forma a conseguirem lidar com eles diariamente.

A palavra juros, segundo Silva (2015), condiz a uma quantia de dinheiro a mais que é aplicada em algum tipo de operação financeira, e durante a vida é possível pagar ou receber juros, dependendo do tipo de aplicação que foi feita.

Os juros são pagos quando são cobrados de uma conta, seja pelo atraso ou um valor a mais do que inicialmente você pagaria da mesma. Essa cobrança é uma forma de compensação pelo período em que alguém arcou com o prejuízo do atraso. Já

com relação ao recebimento de juros esse acontece quando uma pessoa faz um tipo de investimento e recebe juros por “emprestar” dinheiro a um banco ou a uma empresa, situação na qual os juros também são chamados de rendimentos (SILVA, 2015).

No Quadro 2 é possível ver a diferença que há entre juros simples e juros compostos, ambos podem ser vistos no dia a dia dos indivíduos.

Quadro 2 - Diferenças entre juros simples e juros compostos

Tipo de juros	Definição	Exemplo
Juros simples	Os juros simples estão mais presentes nas transações financeiras do dia a dia. Ele é usado, por exemplo, no cartão de crédito, em financiamentos e em alguns tipos de empréstimos. Ao contrário do “irmão” juros compostos, o valor dos juros simples nunca muda durante uma operação. Assim, se você assinou um contrato com determinada porcentagem de juros, pagará ou receberá esse valor até o final do contrato.	Você tem R\$ 1000 para guardar para o futuro, um dinheiro que você não pretende mexer nos próximos meses. Para fazer esse valor crescer, você escolhe uma aplicação com taxa de juros simples de 5% ao mês, o que faz com que, todos os meses, tenha um rendimento de R\$ 50. Assim, a partir do primeiro mês você terá R\$ 1050 na conta. No segundo mês, R\$ 1100, e por aí vai.
Juros compostos	A diferença mais relevante entre os juros simples e composto é o tempo. Nas operações financeiras baseadas em juros simples o tempo não é muito importante, já que o valor final pago será o mesmo, independentemente do prazo. Já quando os juros compostos são aplicados na transação, o prazo faz toda a diferença, porque quanto maior o tempo para quitação de um empréstimo, mais juros serão pagos, já que a taxa é calculada em cima do acumulado da dívida.	Por exemplo, no primeiro mês, os 10% serão calculados em cima dos R\$500, gerando R\$50 de juros e um montante de R\$550. No próximo mês, os 10 % serão calculados em cima do valor atual do montante, ou seja, 10 % de R\$550, gerando juros de R\$55, e assim sucessivamente.

Fonte: Exponencial, 2022.

Os juros simples são aqueles que estão mais presentes no dia a dia das pessoas. Ele pode ser utilizado no cartão de crédito, em financiamentos e em alguns tipos de empréstimo. Ele nunca

muda durante uma operação assim é mais fácil de ser calculado, sendo realizado pela fórmula a seguir.

$$J=C.i.t$$

Onde:

J = juros simples;

C = Capital Inicial;

i = taxas de juros

t = tempo de aplicação

Já no caso dos juros compostos, igualmente, podem fazer parte da rotina das pessoas como em investimentos, empréstimos, financiamentos ou na fatura atrasada do cartão, porém, o seu cálculo já é um pouco mais complexo, sendo feito com base na fórmula a seguir:

$$M=C (1+i)^t$$

Onde:

M = montante acumulado

C = capital investido

i = taxa de juros

t = período de tempo

Para que esse cálculo faça sentido é importante selecionar uma taxa de juros e um período de tempo que sejam equivalentes.

Segundo Azeredo Filho (2018) o conceito de juros pode ser introduzido, primeiramente a partir do uso de expressões como por exemplo dinheiro pago pelo uso do dinheiro emprestado, remuneração de capital empregado em atividades produtivas ou uma remuneração paga pelos bancos sobre o capital que foi aplicado nelas mesmas.

É importante citar que o dinheiro rende mais a partir dos juros compostos do que dos juros simples, pois os juros compostos fazem com que o dinheiro cresça de forma exponencial ao longo do tempo, podendo assim ser percebido o seu crescimento por meio de uma progressão geométrica (AZEREDO FILHO, 2018).

Empregar esses conhecimentos é de grande importância nas instituições de ensino pois esses podem ser empregados no cotidiano nas situações que foram citadas anteriormente.

5 Considerações Finais

O trabalho em questão teve como objetivo geral apresentar a relação entre matemática financeira e educação destacando a sua presença nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e como esses conteúdos podem ser vistos no cotidiano dos alunos, tornando a aprendizagem ainda mais significativa, destacando por fim o uso de juros simples e composto no cotidiano elencando onde esses são utilizados pelas pessoas.

A partir da pesquisa bibliográfica realizada foi possível verificar o quanto é importante inserir conhecimentos cotidianos no ensino da matemática, com o intuito de levar os alunos a ver tal disciplina como sendo algo prazeroso, e não como um desafio a ser desvendado.

Foi possível compreender como a matemática é importante para todos os indivíduos, seja para sua formação quanto para o seu desenvolvimento e crescimento como cidadão. Sendo eficaz não somente para compreender os conteúdos matemáticos, mas também o mundo ao seu redor de todos os problemas que podem surgir no decorrer de sua vida.

Assim, conclui-se que os professores devem buscar formas de levar a aplicação dos conhecimentos e conteúdos matemáticos a atividades que os alunos realizam dia a dia, para que assim, os mesmos aproximem os conteúdos matemáticos à sua realidade e

consigam, de uma forma mais satisfatória, realizar a conexão entre eles, e assim compreende-los de uma forma mais eficiente e eficaz.

Além disso, contando com o apoio da legislação vigente sobre o ensino de matemática financeira nas escolas, os professores poderão utilizar os conceitos básicos para educar financeiramente as crianças de uma forma satisfatória, permitindo que eles perpassem por quaisquer situações que envolvam tais conteúdos.

Referências

AZAMBUJA, M. T. *O uso do cotidiano para o ensino de matemática em uma escola de Caçapava do Sul*. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Ciências exatas) Universidade Federal do Pampa, Caçapava do Sul, 2013.

AZEREDO FILHO, U. G. *Matemática financeira: juros simples e composto*. 2018. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1672-8.pdf> Acesso em 15 out. 2022.

BCB. Banco Central do Brasil. *Relatório de Cidadania Financeira*. 2021. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/content/cidadaniafinanceira/documentos_cidadania/RIF/Relatorio_de_Cidadania_Financeira_2021.pdf Acesso em 30 set. 2022.

BRASIL. BNCC. *Base Nacional Curricular Comum*. Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em 20 out. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação-MEC. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, 2006.

CANTANANTE, I. T.; ARAUJO, E. S. Os limites do cotidiano no ensino da matemática para a formação de conceitos científicos. *Revista do Programa de pós graduação em Educação – UNISUL*, v.especial, 2014.

CARRARA, C. C. C. Uma abordagem teórico prática da matemática financeira no ensino médio. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Campus de Bauru, Bauru, 2018.

CONCEIÇÃO, F. H. G. et al. A importância da aplicabilidade da

matemática no cotidiano: perspectiva do aluno jovem e adulto. // *Encontro Científico multidisciplinar da Faculdade Amadeus*, 2016.

CUNHA, C. P. A importância da matemática no cotidiano. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, 4ed, ano02, v.1, 2017. 2020.

EXPONENCIAL. *Juros simples e composto: veja qual a diferença e aprenda como calcular*. 2022. Disponível em: <https://www.creditas.com/exponencial/emprestimo-juros-simples-ou-compostos/> Acesso em 25 out. 2022.

FERREIRA, M. C. O.; SANTOS, G. M. Educação financeira e suas relações com a propensão ao endividamento: análise de antecedentes. Uberlândia, MG, 2019. *Encontro Nacional dos cursos de Graduação em Administração – ENANGRAD*, Uberlândia, Anais eletrônicos, 2019.

GONÇALVES, D. R. G. de.; POZZOBON, M. C. C. A matemática do cotidiano e a matemática escolar: o jogo de “bolija”. *XII Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2016.

REZENDE, A. A.; SILVA-SALSE, A.; CARRASCO, E. A matemática financeira no ensino médio brasileiro: perspectivas para formação de indivíduos críticos. *Revista Baiana de Educação Financeira*, v.3, n.1, 2022.

RIBEIRO, V. M.; COSTA, N. M. L. O papel da matemática financeira para o desenvolvimento de habilidades do estudante no Ensino Médio. *Research, Society and Development*, v.11, n.5, 2022.

SANTOS, R. A. B. et al. Matemática financeira: conceitos básicos e a importância do seu ensino nas escolas. *Revista sítio novo*, Palmas, v.5, n.2, 2021.

SILVA, A. F. M. *A importância da matemática financeira no ensino básico*. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática) Rede Nacional no IMPA, Rio de Janeiro, 2015.

SILVA, A. H. et al. Contribuições da matemática financeira e da tecnologia à educação financeira de alunos no ensino médio. *VI Congresso Nacional de Educação*, CONEDU, 2019.

SILVA, D. R.; VICENTE, V. M. B.; CARDOSO, A. C. O comportamento e a atitude financeira em indivíduos de baixa Renda. Uberlândia MG, 2019. *Encontro Nacional dos Cursos de Graduação em Administração — ENANGRAD*, 2019, Uberlândia MG. Anais eletrônicos 2019.

SILVA, F. J. T. Fatores que influenciam no desenvolvimento do ensino da matemática no ensino fundamental. *Revista Inovação e Tecnologia Social*, v.1, n.5, 2020.

SILVA, G. O. et al. Alfabetização financeira versus educação financeira: um Estudo do comportamento de variáveis socioeconômicas e Demográficas. *Revista de Gestão, Finanças e Contabilidade*, Salvador, v. 7, n. 3, 2017.

VISENTINI. L.; WEINGARTNER, T. S. Educação financeira: análise dos conhecimentos de estudantes relacionados a finanças em uma escola de ensino médio. *Revista Sociais & Humanas* – v.31, n. 1, 2018.

PESQUISA OPERACIONAL E A PROGRAMAÇÃO LINEAR NA MINIMIZAÇÃO DE CUSTOS E MAXIMIZAÇÃO DE LUCROS: um estudo de caso

Otávio César Francisconi de Oliveira
Licenciando em Matemática – Uni-Facef
francisconiotávio@gmail.com

Isabella Esteves Carvalho Lopes
Licencianda em Matemática – Uni-Facef
isabellaesteves3@gmail.com

Dr.^a Lucinda Maria de Fátima Rodrigues Coelho
Doutora em Ciências – Uni-Facef
lucindarcoelho@gmail.com

Resumo: Este artigo tem por objetivo apresentar a pesquisa operacional como uma estratégia para otimização de lucros e custos de um determinado produto, através da programação linear (PL), com diferentes métodos, para as diversas possibilidades de se encontrar a solução ótima, na qual, serão abordados os métodos gráfico e algébrico, além da utilização de aplicativos computacionais. A solução pelo método gráfico só é possível quando se trabalha com apenas com duas variáveis para a obtenção dos pontos de intersecção das retas, em que são observados os pontos de máximo e/ou de mínimo do problema, também denominados, respectivamente, por maximização e minimização. Outro método é o algébrico ou também conhecido por Tableau Simplex, um dos mais utilizados na “PL”, em que se pode trabalhar com até três variáveis de decisão, diferentemente do método gráfico, com apenas duas variáveis. O Simplex é um método de interações, que ocorrem com um determinado número, denominado de elemento pivô, quando se trabalha com tabelas em uma linha ou coluna qualquer, visando a determinação das soluções ótimas. Outro processo, é a utilização de aplicativos computacionais, tais como o software “lindo”, que nesse trabalho será o responsável por realizar interações para a obtenção da solução ótima de maneira fácil e acessível a todos. Ao final, para o melhor entendimento sobre as tomadas de decisão, serão aplicados todos os conceitos trabalhados em um problema real e prático, no qual nota-se especificamente, a maximização de lucros de uma determinada fábrica.

Palavras-chave: Pesquisa operacional. Programação linear. Simplex. Método gráfico. Software lindo.

1 Introdução

Esse trabalho trata de uma pequena parte da pesquisa operacional (PO), com ênfase no estudo matemático, e, principalmente, com os conceitos da programação linear para a obtenção de lucros maximizados e custos minimizados, por meio dos métodos gráficos e Tableau Simplex, além da utilização de um software para a otimização de resultados.

Inicialmente, faz-se uma abordagem do contexto histórico, seu surgimento, e a expansão da pesquisa operacional. Em seguida, são apresentados alguns conceitos importantes da programação linear (PL), pertencente ao rol das disciplinas de PO; da modelagem matemática; do método gráfico e também da apresentação do software GeoGebra, um facilitador para a confecção de gráficos e para a visualização dos resultados.

No capítulo seguinte, discute-se sobre o Tableau Simplex, um dos métodos mais trabalhados e desenvolvidos dentro da PL, o qual permite, algebricamente, encontrar diversas soluções de eficácia em tomadas de decisão. Além disso, temos a utilização do software Lindo para a maximização e de minimização de lucros e custos de uma empresa.

Para finalizar, aplicam-se os fundamentos e métodos elencados anteriormente a um problema real, com dados, informações e objetivos de uma fábrica artesanal de estampas de couro na cidade de Franca-SP, para determinado problema, em que se busca soluções para maior eficiência da empresa.

2 Pesquisa operacional

A Pesquisa Operacional, com frequência atribuída apenas a sigla PO, faz parte de uma área do conhecimento que envolve o uso de técnicas com embasamento lógico científico, para tratar questões de gestão que auxiliam no processo de tomada de

decisão.

A origem do termo Pesquisa Operacional é atrelada a época da Segunda Guerra Mundial, quando os militares necessitavam gerenciar seus recursos de forma eficiente nos campos de batalha. Tais como: alimentos, munições e medicamentos, uma vez que esses itens precisavam ser levados em quantidade correta e com o mínimo custo possível.

Em consequência do estudo da PO, segundo Hilier e Lieberman (2013), “garantiram-se vitórias nas Batalhas Aéreas na Grã-Bretanha e no Atlântico Norte, igualmente auxiliaram na Campanha Britânica no Pacífico”. Logo depois, com o fim da guerra e com a expansão econômica, percebeu-se que os problemas tratados nas operações militares eram semelhantes aos das indústrias. A partir desse momento, em 1950, a PO passou a ser estudada e aplicada em organizações das mais variadas áreas de atuação.

Nesse sentido, com o surgimento dos computadores, a PO teve um crescimento exponencial, quando alavancaram diversas técnicas que são utilizadas por meio de cálculos, os quais vão de técnicas simples às mais complexas. A partir de 1980, já com a popularização dos computadores nas empresas, essas técnicas se difundiram ainda mais.

Segundo Taha, “ Em PO, não se tem uma única técnica para resolver todos os modelos matemáticos que podem surgir na prática. Em vez disso, o tipo e a complexidade do modelo matemático é que determinam a natureza do método de solução”. Com isso, nesse trabalho, serão aplicados alguns métodos da programação linear como técnicas de resolução.

3 Programação linear

A programação Linear é considerada uma das principais técnicas difundidas pela PO. De acordo com Taha “[...] a técnica

mais utilizada dentro da PO é a programação linear, ela é aplicada a modelos cujas funções, objetivo e as restrições são lineares[..]”. A programação linear, também conhecida pela sua sigla PL, consiste na representação das características de um problema em forma de conjunto de inequações lineares, em que a matemática básica é utilizada na etapa de elaboração dessas inequações. Essa primeira etapa é chamada de modelagem do problema.

Geralmente, os problemas de otimização com o uso da PL têm por objetivo, minimizar custos e maximizar lucros. Os problemas mais simples podem ser resolvidos com relativa facilidade por meio de um método gráfico. Nessa perspectiva, na maioria das vezes, utiliza-se esse método para solucionar problemas com até duas variáveis. A partir de três variáveis, o método gráfico torna-se inviável, por se tornar um trabalho mais complexo.

Por essa razão, quando há problemas de mais de duas variáveis, a solução é dada por algoritmos e softwares.

3.2 Termos da Programação Linear (PL)

Variáveis de decisão, função objetivo e restrições são três termos que serão extensamente utilizados a partir daqui. A solução de um problema de PL sempre irá conter esses três elementos, os quais, serão descritos a seguir.

3.2.1 Variáveis de decisão

Todo problema de PL busca obter uma solução ótima para uma dada situação. Essa solução é resultante de um conjunto de decisões, por exemplo: Quantos produtos do tipo “x” serão produzidos; qual a quantidade da matéria-prima “y” a ser comprada; investir, ou não investir em certa ação do mercado de capitais, entre outros. Dessa forma, as variáveis de decisão são todas as opções que se apresenta em um devido problema.

Elas são incógnitas a serem definidas na solução. Desse modo, tratando-se de problemas de PL, as variáveis de decisão deverão sempre, adotar um comportamento linear, ou seja, não podem ser exponencializadas ou multiplicadas entre si, o que resultaria em um comportamento não linear.

3.2.2 Função objetivo

A otimização de um problema de PL visará a maximização ou minimização de um determinado objetivo, tais como: maximizar o lucro da empresa; minimizar o custo de compra, entre outros. Desse modo, a Função Objetivo (FO) ou (Z) é uma expressão matemática que quantifica a solução de um dado problema.

Exemplo: Dado a possibilidade de produção de três produtos, x , y , e z , os quais possuem respectivamente os seguintes lucros: R\$ 10,00, R\$ 15,00 e R\$ 19,00, a FO seria expressa como:

$$\text{Max.Lucro}=10p_1+15p_2+19p_3$$

Em outras palavras, a FO sinaliza o objetivo a ser maximizado em um problema de PL.

3.2.3 Restrições

Sempre haverá algo que limita a otimização de um problema. No exemplo anterior, as produções de x , y e z poderão ser limitadas em termos de capacidade produtiva, máxima quantidade que o mercado demanda, bem como o limite de oferta de matéria-prima, etc. Assim sendo, as restrições são limitantes aos valores das variáveis de decisão. As restrições são expressas em equações ou inequações matemáticas que traduzem um limitante físico à solução do problema.

3.3 Modelagem

Na PL, a primeira etapa na resolução de um problema de otimização é a modelagem matemática, a qual, tem por objetivo, expor os dados de um determinado problema.

Para que se identifique os dados do problema a ser trabalhado, é importante seguir alguns passos:

- 1º Organizar os dados;
- 2º Descobrir o que deve ser determinado (variáveis do problema);
- 3º Definir a função objetivo;
- 4º Reproduzir os caminhos que levam a uma solução, no caso, elas são as nossas restrições (inequações);
- 5º Representar graficamente as inequações e definir a região admissível;
- 6º Indicar a solução ou soluções ótimas;
- 7º Substituir o valor dos vértices na função objetivo para calcular/confirmar a solução ótima obtida graficamente.

3.3.1 Exemplos práticos para modelagem

Exemplo 1: A firma “Aquece Mais” produz dois tipos de aquecedores solares: aquecedor padrão e aquecedor de luxo.

1º passo:	Aquecedor Padrão	Banho quente
Reservatório de água:	1	1
Tubos inox:	16 metros	12 metros
Horas de trabalho:	6h.	9h.
Lucro unitário:	R\$300	R\$350

2º passo: Há de estoque, 200 reservatórios de água, 2880 metros de tubos de inox, além de ser possível, no máximo, 1566 horas de trabalhos para que os aquecedores sejam produzidos. Como “modelar” esses dados para obter o maior lucro?

Modelagem:

3º passo:

Nº de Aquecedor Padrão: X_1

Nº de Banho quente: X_2

MAX $Z = 350X_1 + 300X_2 \rightarrow$ função objetiva

4º passo:

$$12X_1 + 16X_2 \leq 2880$$

$$9X_1 + 6X_2 \leq 1566$$

Como as variáveis não admitem valores negativos, então: $X_1 \geq 0$ e $X_2 \geq 0$

Em seguida (3.4.1), serão apresentados os passos seguintes para a solução desse problema, pelo método RESOLUÇÃO GRÁFICA DE PROBLEMAS DE INEQUAÇÕES LINEARES COM DUAS VARIÁVEIS.

3.4 Resolução gráfica

Modelos de programação linear com até 3 variáveis podem ser resolvidos graficamente, embora esse tipo de solução não tenha aplicação prática, já que, problemas do mundo real têm sempre muitas variáveis.

3.4.1 Resolução gráfica de problemas de inequações lineares com duas variáveis

Para problemas que apresentam duas variáveis de decisão, a solução ótima pode ser encontrada por gráficos.

Problemas de inequações lineares envolvendo duas variáveis primárias são resolvidos geometricamente, escrevendo-se as restrições de desigualdade como igualdades. A partir disso, determina-se um polígono de soluções viáveis, Segundo Chiang:

No caso de duas variáveis ($n=2$), o método gráfico de resolução pode conduzir-nos à solução ótima sem dificuldades. Isto é, independentemente do número de restrições presentes no programa linear, pois as restrições adicionais aumentam apenas o número de pontos extremos, e não a dimensão do diagrama. Quando há três variáveis de escolha, no entanto, o método se torna complicado demais devido à necessidade de desenhar um gráfico tridimensional. E no caso de n variáveis, o método é inviável (Chiang. 1982. Pag. 559).

Diz-se que uma solução é viável se ela satisfaz todas as restrições do problema. Uma vez obtido o polígono de soluções viáveis, o próximo passo é determinar qual das soluções do problema é a solução ótima.

O seguinte teorema é usado para reduzir o número de soluções viáveis a serem testadas:

[..] se existir uma única solução que maximiza ou minimiza uma função objetivo linear, então esta solução deve corresponder a um vértice (ou ponto extremo) do polígono de soluções viáveis. Se existir mais de uma solução, pelo menos duas das soluções devem corresponder a vértices do polígono de soluções viáveis [...] (Souza,2010).

Portanto, o valor da função precisa ser calculado apenas para as soluções que correspondam aos vértices do polígono de

soluções viáveis, a fim de determinar a solução ótima.

Em alguns casos, algumas dessas soluções são nitidamente inviáveis em relação aos valores correspondentes da função objetivo, não precisando ser calculada.

3.4.2 Método prático

5º Passo: Traçar, em um mesmo plano, o gráfico de cada inequação:

- Identificar os eixos com as variáveis de decisão.
- Substituir a desigualdade por uma igualdade.
- Traçar as retas no plano cartesiano.
- Escolher um ponto auxiliar, de preferência o ponto $(0, 0)$, e verificar se o mesmo satisfaz, ou não a desigualdade inicial.

Em caso positivo, a solução da inequação corresponde ao semiplano, ao qual pertence o ponto auxiliar.

Em caso negativo, a solução da inequação corresponde ao semiplano oposto àquele, ao qual pertence o ponto auxiliar.

6º Passo: Determinar a região correspondente à intersecção dos dois semiplanos, isto é, desenhar as restrições para delimitar a chamada “região viável”.

3.4.3 Exemplo do método prático no geogebra

Baseado no exemplo 1 anterior em que se modelou, um “passo a passo” para a construção dos gráficos no software GeoGebra, escolhido por ser um aplicativo de fácil acesso, gratuito e com uma interface amigável.

Inicialmente, determina-se o conjunto de pontos (X_1, X_2) que satisfaçam as restrições. Para isso, determinam-se os pontos no plano cartesiano que satisfaçam cada uma das inequações das

restrições.

1º - Entre no site “Calculator Suite – GeoGebra”

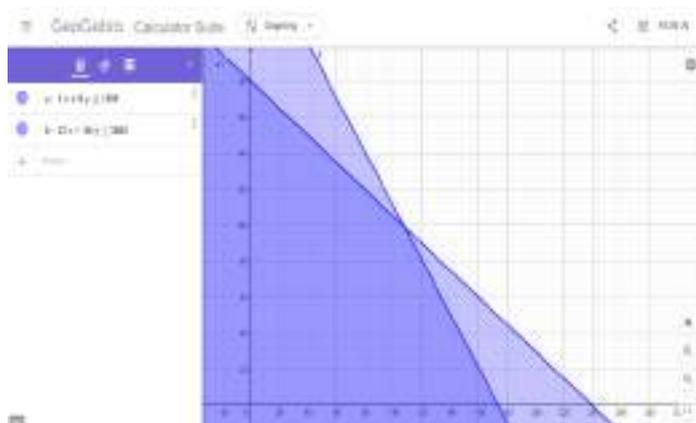
Gráfico 1: Interface do GeoGebra



Fonte: autores.

2º - Clicar em “input”, e digitar a 1ª inequação e a 2ª inequação do sistema e clicar em “enter”.

Gráfico 2: Inequações $12X_1 + 16X_2 \leq 2880$ e $9X_1 + 6X_2 \leq 1566$



Fonte: autores

A região destacada representa os pontos $(x; y)$ do plano R^2 , que satisfazem as desigualdades.

Como tais variáveis não admitem valores negativos, isto é, $X_1 \geq 0$ e $X_2 \geq 0$, têm-se uma região mais restrita ainda.

4º Digitam-se as duas últimas inequações do sistema, e clicar novamente na tecla “enter”.

Gráfico 3: Sistema de Inequações com a região viável.



Fonte: autores.

O interior ou as arestas do polígono sombreado no Gráfico 3, correspondem a um par de valores X_1 e X_2 que satisfazem as restrições do problema, sendo, portanto, uma solução viável.

Para obter a solução ótima, nesse caso, o lucro máximo, emprega-se ao teorema que afirma que, no caso de existir uma única solução que maximiza ou minimiza uma função objetivo linear, então esta solução deve corresponder a um vértice (ou ponto extremo) do polígono de soluções viáveis e fazer um estudo sobre tais pontos dos vértices:

Substituindo cada ponto dos vértices na função objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Max: } Z &= 350X_1 + 300X_2 \\ P_1 &= (0,0) ; P_2 = (150,0) ; P_3 = (180,0) ; P_4 = (122,78) \end{aligned}$$

Tabela 1: Máximo da função objetivo: $Z = 350X_1 + 300X_2$

Pontos(x; y)	$Z = 350X_1 + 300X_2$
(0, 0)	= 0
(180, 0)	= 63000
(122, 78)	= 66100
(0, 180)	= 54000

$$\text{Max: } Z = 350X_1 + 300X_2$$

$$\text{Max: } Z = 350 \cdot (122) + 300 \cdot (78) = 66.100$$

$$\text{Max: } Z = 66.100$$

Portanto conclui-se que: $P_3 = (122; 78)$ é o que fornece o máximo lucro = **R\$ 66.100**

4 Tableau Simplex

O método Tableau Simplex ou simplesmente, Simplex, é um processo iterativo no qual permite melhorar a solução da função objetivo em cada etapa.

O processo é finalizado quando não é mais possível continuar melhorando este valor, ou seja, quando é possível obter o valor ótimo ou a solução ótima (o maior ou menor valor possível, segundo o caso, para que todas as restrições sejam satisfeitas).

De acordo com Chiang “O método simplex baseia-se na seguinte propriedade: “Se a função objetivo Z não toma seu valor máximo no vértice A , quer dizer que existe uma aresta que parte de A e ao longo da mesma, o valor de Z aumenta”.

4.1 Modelagem na forma padrão

A forma padrão do modelo de problema, consiste em uma função objetivo, sujeita a certos critérios (as restrições). Portanto o modelo deve atender às seguintes condições:

- O objetivo é maximizar ou minimizar o valor da função objetivo (por exemplo, aumentar lucros ou reduzir as perdas, respectivamente).
- Todas as restrições devem ser equações de igualdade (identidades matemáticas).
- Todas as variáveis (x_i) devem ser positivas ou nulas (condição de não-negatividade).
- Os termos independentes (b_i) de cada equação devem ser não-negativos.

Como mencionado, o objetivo do método simplex é otimizar o valor da função objetivo. No entanto duas opções são apresentadas: obter o maior valor ótimo (maximizar) ou obter o menor valor ótimo (minimizar).

Além disso, existem diferenças no algoritmo, quando trabalhamos com diferentes objetos, sejam eles de maximizar ou minimizar a função objetivo.

4.1.1 Objetivo da maximização

Critério de parada: Quando, na linha Z, não aparece nenhum valor negativo.

Condição de entrada na base: o menor valor negativo na linha Z (ou o de maior valor absoluto entre os negativos) indica a variável P_j que entra na base.

Condição de saída da base: depois de obter a variável de entrada, determina-se a variável de saída por meio do menor quociente P_0 / P_j dos valores estritamente positivos.

4.1.2 Objetivo da minimização

Critério de parada: quando, na linha Z, não aparece nenhum valor positivo.

Condição de entrada na base: o maior valor positivo na linha Z indica a variável P_j que entra na base.

Condição de saída da base: depois de obter a variável de entrada, determina-se a variável de saída por meio do menor quociente P_0/P_j dos valores estritamente negativos.

4.2 Método prático

EXEMPLO 2: Em uma fábrica que produz materiais de inox para cozinha, tem em sua linha de produção três tipos de colheres a “luxo”, “prime” e a “simples”, a primeira colher é produzida utilizando-se 3,5 mm de inox tendo um custo material de R\$3,00 essa mesma colher passa por um processo de polimento, ficando 6 horas para ser totalmente polida e finalizada, a segunda colher tem o mesmo custo de material que a primeira, porem ela gasta apenas 3 horas de polimento para ser finalizada, já a terceira e última colher é produzida utilizando-se 2,5mm de inox, tendo um custo material de R\$2,00 e por ser uma peça popular não passa por nenhum processo de polimento. Ao término da produção foi observado que sobrou uma peça de inox com o custo material médio de R\$30 e 48 horas na oficina de polimento, procurando-se o máximo lucro, sabendo se que a colher “luxo” deixa um lucro de R\$10,00 a colher “prime” deixa de lucro R\$8,00 e a “simples” R\$1,00 qual a quantidade de colheres a serem produzidas de forma que utilizem todo o inox e as horas vagas na oficina de polimento?

Seja a seguinte modelagem padrão:

$$Z \max = 10x_1 + 8x_2 + x_3$$

Sujeito a:

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30$$

$$6x_1 + 3x_2 \leq 48$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Utilizando o método tableau simplex encontre o valor máximo de z.

1º PASSO: Observar as restrições. Como estamos trabalhando com maximização, as restrições devem obedecer ao sinal de \leq (menor ou igual), sendo x_1 e $x_2 \geq 0$.

2º PASSO: transformar a função objetiva em equação:

$$Z = 10x_1 + 8x_2 + x_3 \rightarrow Z - 10x_1 - 8x_2 - x_3 = 0$$

3º PASSO: Adicionar as variáveis de folga:

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + xf_1 = 30$$

$$6x_1 + 3x_2 + xf_2 = 48$$

4º PASSO: Criar a primeira tabela de resolução:

Linha 1 - (L₁): São os valores de x_1 ; x_2 ; x_3 ; xf_1 e xf_2 da primeira restrição ($3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + xf_1 = 30$)

Linha 2 - (L₂): São os valores de x_1 ; x_2 ; x_3 ; xf_1 e xf_2 da segunda restrição ($6x_1 + 3x_2 + xf_2 = 48$)

Linha 3 - (L₃): São os valores de x_1 ; x_2 ; x_3 ; xf_1 e xf_2 da equação objetiva ($Z - 10x_1 - 8x_2 - x_3 = 0$)

Tabela 1

	z	x_1	x_2	x_3	xf_1	xf_2	b
L ₁	0	3	3	2	1	0	30
L ₂	0	6	3	0	0	1	48
L ₃	1	-10	-8	-1	0	0	0

5º PASSO: Encontrar o elemento pivô:

Na L₃, encontra-se o menor valor e define-se a coluna em que ele está inserido como coluna pivô.

Agora, deve-se encontrar o menor elemento em L_2 e L_1 .

$$L_1 \rightarrow 30 \div 3 = 10 \text{ e } L_2 \rightarrow 48 \div 6 = 8$$

O menor elemento foi o 8, então a L_2 será denominada linha pivô.

Com isso, encontra-se o 6, denominado elemento pivô.

A seguir, para melhor visualização, têm-se a Tabela-nº 2.

Tabela 2

	x	x_1	x_2	x_3	xf_1	xf_2	b	
L_1	0	3	3	2	1	0	30	$30 \div 3 = 10$
L_2	0	6	3	0	0	1	48	$48 \div 6 = 8$
L_3	1	-10	-8	-1	0	0	0	

6º PASSO: Transformar o elemento pivô (6) em 1:

$$\text{Neste caso será } L_2 \div 6 \rightarrow \frac{(0; 6; 3; 0; 0; 1; 48)}{6} = (0; 1; \frac{1}{2}; 0; 0; \frac{1}{6}; 8)$$

$$\text{Agora a } L_2 \text{ passa a ser } NL_2 = (0; 1; \frac{1}{2}; 0; 0; \frac{1}{6}; 8)$$

7º PASSO: Criar uma nova L_1 e L_3 , fazendo o elemento da coluna pivô igualar a zero.

$$\rightarrow \text{Nova } L_1: NL_2 \times (-3) + L_1 = [(0; 1; \frac{1}{2}; 0; 0; \frac{1}{6}; 8) \times (-3) + (0; 3; 3; 2; 1; 0; 30)] =$$

$$NL_1 = (0; 0; \frac{3}{2}; 2; 1; -\frac{1}{2}; 6)$$

$$\rightarrow \text{Nova } L_3: NL_2 \times (10) + L_3 = [(0; 1; \frac{1}{2}; 0; 0; \frac{1}{6}; 8) \times (10) + (1; -10; -8; -1; 0; 0; 0)] =$$

$$NL_3 = (1; 0; -3; -1; 0; \frac{5}{3}; 80)$$

Agora rescrevendo todas as linhas encontradas em uma nova Tabela-nº 3:

Tabela 3

	z	x₁	x₂	x₃	xf₁	xf₂	b
L₁	0	0	3/2	2	1	-1/2	6
L₂	0	1	1/2	0	0	1/6	8
L₃	1	0	-3	-1	0	5/3	80

O critério de parada é estabelecido quando na linha Z da tabela 3 não aparece nenhum valor negativo, nesse caso, a L3 apresenta valores não positivos. Sendo assim, repete-se todos os processos anteriores nessa tabela.

8º PASSO: Encontrar o elemento pivô:

Na L₃, encontra-se o menor valor e define-se a coluna em que ele está inserido como coluna pivô.

Em seguida, é necessário encontrar o menor elemento em L₂ e NL₁.

$$L_1 \rightarrow 6 \div 3/2 = 4$$

$$L_2 \rightarrow 8 \div 1/2 = 16$$

O menor elemento foi o 4, obtendo-se a linha pivô L1. Com isso, encontra-se como elemento pivô o 3/2. Abaixo encontra-se a visualização da Tabela-nº 4

Tabela 4

	z	x_1	x_2	x_3	x/f_1	x/f_2	b	
L_1	0	0	3/2	2	1	-1/2	6	$6 \div 3/2 = 4$
L_2	0	1	1/2	0	0	1/6	8	$8 \div 1/2 = 16$
L_3	1	0	-3	-1	0	5/3	80	

9º PASSO: Transformar o elemento pivô (3/2) em 1:

Neste caso será $L_1 \div 3/2 \rightarrow \frac{(0; 0; \frac{3}{2}; 2; 1; -\frac{1}{2}; 6)}{\frac{3}{2}} = (0; 0; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 4)$

Agora a L_1 passa a ser $NL_1 = (0; 0; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 4)$

10º PASSO: Criar uma nova L_2 e L_3 , fazendo o elemento da coluna pivô igualar a zero.

→ Nova L_2 : $L_1 \times (-1/2) + L_2 = [(0; 0; 1; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 4) \times (-1/2)] + (0; 1; 1/2; 0; 0; 1/6; 8) =$

$NL_2 = (0; 1; 0; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 6)$

→ Nova L_3 : $NL_1 \times (3) + L_3 = [(0; 0; 1; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 4) \times (3) + (1; 0; -3; -1; 0; 5/3; 80)]$

$NL_3 = (1; 0; 0; 3; 2; \frac{2}{3}; 92)$

Rescrevendo todas as linhas encontradas em na nova Tabela nº 5:

Tabela 5

	z	x_1	x_2	x_3	xf_1	xf_2	b
NL₁	0	0	1	4/3	2/3	-1/3	4
NL₂	0	1	0	-2/3	-1/3	1/3	6
NL₃	1	0	0	3	2	2/3	92

Como pode-se observar, a linha Z (NL₃) é positiva, então estabelece nosso critério de parada.

Desse modo, obtém-se os seguintes resultados:

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = 0$$

$$Z \max = 92$$

Para verificar se a resposta é correta, basta substituir os termos na equação:

$$Z \max = 10x_1 + 8x_2 + x_3$$

$$Z \max = 10 \times (6) + 8 \times (4) + 0 = 92$$

$$Z \max = 92$$

Portanto, conclui-se que a solução ótima é a fabricação de 6 colheres “luxo” e 4 colheres “prime”, tendo a solução ótima, um lucro de R\$92,00

4.3 Utilização de software lindo

Nesse artigo, optou-se por utilizar o software LINDO, pois é considerado um software de maior facilidade e velocidade na sua utilização, segundo Junior e Souza: “[...] por ser uma das melhores ferramentas de resolução de modelos de otimização [...]”, (JUNIOR E SOUZA, 2004). O LINDO maximiza lucros e minimiza custos.

4.3.1 Método prático aplicado no exemplo 2

Primeiramente requer-se da modelagem do exemplo 3, já realizada:

$$Z \max = 10x_1 + 8x_2 + x_3$$

Sujeito a:

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30$$

$$6x_1 + 3x_2 \leq 48$$

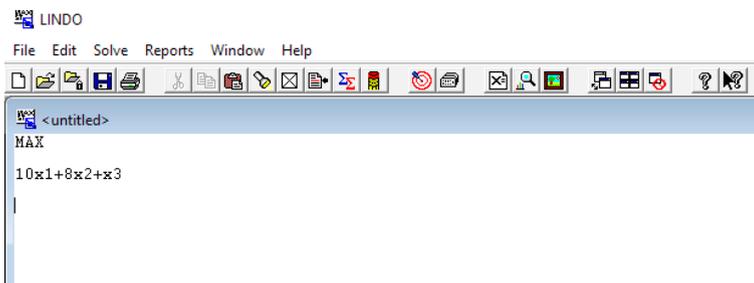
$$x_1; x_2 \geq 0$$

Resolução passo a passo:

1º - Abrir o software e digitar a função objetiva:

MAX

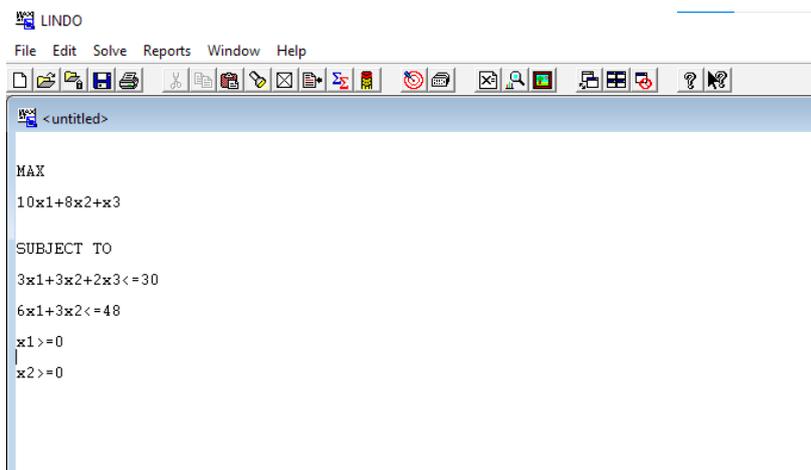
$$10x_1 + 8x_2 + x_3$$



Fonte: autores

2º - Digitar o comando “SUBJECT TO” e logo em seguida digitar as restrições do nosso modelo:

$$\begin{aligned}3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 30 \\6x_1 + 3x_2 &\leq 48 \\x_1; x_2 &\geq 0\end{aligned}$$



Fonte: autores

3º - Digitar o último comando: “END” e clicar no comando “objetivar”



Fonte: autores

4º - Após todos os comandos o resultado é gerado pelo software:

LIP OPTIMUM FOUND AT STEP 2		
OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	92.00000	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
x1	6.000000	0.000000
x2	4.000000	0.000000
x3	0.000000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	2.000000
3)	0.000000	8.666667
4)	0.000000	8.000000
5)	4.000000	0.000000

Fonte: autores

Dessa forma, o software nos dará a resposta. Como pode-se observar, a solução ótima foi a mesma que a encontrada no tableau simplex, do exemplo anterior.

$$Z \max = 10x_1 + 8x_2 + x_3$$

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = 0$$

$$Z \max = 10 \times (6) + 8 \times (4) + 0 = 92$$

$$Z \max = 92$$

Portanto, conclui-se que a solução ótima é a fabricação de 6 colheres “luxo” e 4 colheres “prime”, tendo a solução ótima, um lucro de R\$92,00

5 Aplicação

Para inserir todas as aplicações da PL em algum problema do mundo real, foi realizado um levantamento em uma pequena fábrica de estampas de couro para botinas na cidade de Franca-SP, em que foram levantados estoques, tipos de estampas, valores,

custos da matéria prima e mão-de-obra em forma de número de horas trabalhadas. Assim, nos deparamos com o seguinte problema:

Como maximizar o lucro dentro dessas restrições?

5.1 Problema a ser trabalhado

Na fábrica de calçado Leather Shoe, são produzidos dois tipos de estampa para botinas, a estampa “Colmeia” e a “Copacabana”. Na fabricação da estampa Colmeia, a empresa gasta 35 minutos de mão-de-obra e têm um custo de R\$12,00 de couro gasto. Já na fabricação da estampa “Copacabana”, a empresa gasta 42 minutos de mão-de-obra e por essa estampa ser trabalhada com alguns detalhes no material, é gasto R\$15,00 de couro. A primeira estampa deixa um lucro de R\$25,90, enquanto a segunda estampa deixa R\$34,70 de lucro. Sabendo-se que a empresa é de pequeno porte e precisa deixar um estoque pronto para entregar aos seus clientes e sabendo-se também, que a empresa dispõe de 9 horas de mão-de-obra e R\$300,00 de couro que já foi comprado, quanto deve-se fabricar de cada produto para obter o maior lucro possível?

5.1.1 Modelar o problema

$$Z \max = 25,90x_1 + 34,70x_2 \rightarrow \text{Função objetiva}$$

Sujeito a:

$$35x_1 + 42x_2 \leq 540$$

$$12x_1 + 15x_2 \leq 300$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$

5.1.2 Resolução pelo método gráfico utilizando o aplicativo geogebra

1º - Entre no site “Calculator Suite – GeoGebra”.

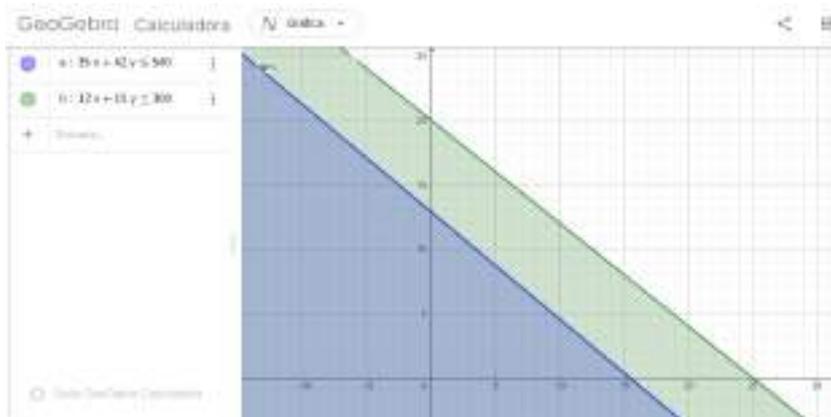
Gráfico 4: Interface do GeoGebra.



Fonte: autores.

2º - Clicamos em “input”, e digitamos a 1ª inequação e a 2ª inequação do sistema e clicamos em “enter”.

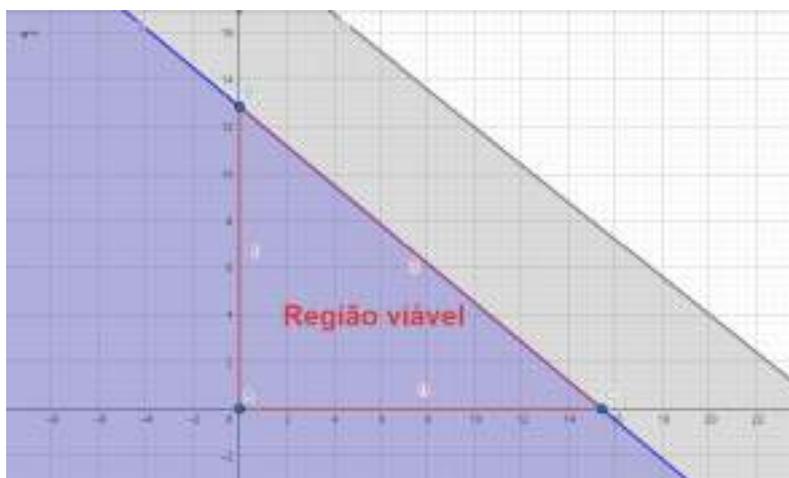
Gráfico 5: Inequações $35mx_1 + 42x_2 \leq 540$ e $12x_1 + 15x_2 \leq 300$.



Fonte: autores

3º - Digitamos as duas últimas inequações do sistema, e clicamos novamente na tecla “enter”.

Gráfico 6: Sistema de Inequações e a região viável



Fonte: autores.

Para chegar no gráfico acima, usamos o seguinte sistema de inequação:

No interior ou nas arestas do polígono sombreado no Gráfico 6 correspondem um par de valores X_1 e X_2 que satisfazem as restrições do problema, sendo, portanto, uma solução viável.

Além disso, para obter a solução ótima, nesse caso é considerada como o lucro máximo, emprega-se o teorema que afirma que, no caso de existir uma única solução que maximiza ou minimiza uma função objetivo linear, então essa solução deve corresponder a um vértice (ou ponto extremo) do polígono de soluções viáveis e fazer um estudo sobre tais pontos dos vértices.

Substituindo cada ponto dos vértices na função objetivo:

$$Z \text{ max} = 25,90X_1 + 34,70X_2$$

$$P_1 = (0,0) ; P_2 = (0,12,85); P_3 = (15,42;0)$$

Tabela 6: Máximo da função objetivo: $z = 25,90X_1 + 34,70X_2$

Pontos(x; y)	Z=25,90X + 34,70Y
(0;0)	= 0
(0; 12,85)	= 446,14
(15,42; 0)	= 399,37

$$Z \text{ max} = 25,90 \cdot (0) + 34,70 \cdot (12,85)$$

$$Z \text{ max} = 446,14$$

Conclui-se que: $P_2 = (0; 12,85)$ é o que fornece o máximo lucro = **R\$ 446,14**.

Número de botinas do tipo “Colmeia” $X_1 = 12,85$ ou aproximadamente 13 botinas. Lucro máximo $Z \text{ max} = \text{R\$ } 446,14$

5.1.3 Simplex

Como pode-se observar no método gráfico, a solução ótima foi quando a variável X_2 foi atribuída ao valor 12,85. Sendo assim, a variável $X_1 = 0$. Desse modo, pelo simplex não aconteceria nenhuma interação. Por isso, esse método tornar-se-ia inviável pelo seu trabalho. Assim sendo, essa aplicação do problema real será solucionada pelo método gráfico e pelo software Lindo.

5.1.4 Resolução pelo software “lindo”

1º - Abrir o software e digitar a função objetiva:

MAX

$$25,90x_1 + 34,70x_2$$



```
|
MAX
25.90X1+34.70X2
```

Fonte: autores

2º - Digitar o comando “SUBJECT TO” e logo em seguida digitar as restrições do nosso modelo:

$$35x_1 + 42x_2 + \leq 540$$

$$12x_1 + 15x_2 \leq 300$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$



```
MAX
25.90X1+34.70X2
```

```
SUBJECT TO
35X1+42X2<= 540
12x1+15x2<= 300
x1>= 0
x2>= 0
```

Fonte: autores

3º - Digitar o último comando: “END” e clicar no comando “objetivar”



Fonte: autores

4º - Após todos os comandos, o resultado é gerado pelo software.

```

LINDO - [Reports Window]
File Edit Solve Reports Window Help
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
    1)      446.1429
VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
X1              0.000000      3.016667
X2             12.857142      0.000000
    
```

Fonte: autores

Dessa forma, encontrou-se o mesmo resultado que o do método gráfico.

$$Z_{\max} = 25,90 \cdot (0) + 34,70 \cdot (12,85)$$

$$Z_{\max} = 446,14$$

Conclui-se que: $P_2 = (0; 12,85)$ é o que fornece o máximo lucro = **R\$ 446,14**.

Número de botinas do tipo “Colmeia” $X_1 = 12,85$ ou aproximadamente 13 botinas. Lucro máximo $Z_{\max} = R\$446,14$

6 Considerações finais

Em problemas reais de otimização, busca-se maximizar ou minimizar uma quantidade específica, chamada objetivo, que depende de um número finito de variáveis de entrada.

Na PL as variáveis de entrada devem ser independentes umas das outras ou relacionadas por meio de restrições.

Ao ser observado a importância de maximizar ou minimizar lucros e custos, torna-se viável um estudo aprofundado sobre a programação linear. Ao trabalhar com a PL, estamos aptos a trabalhar com os diferentes métodos de resolução, os últimos, aplicados diretamente a matemática, resultam na utilização de

termos específicos da área administrativa e industrial.

Além dessas observações que geraram o nosso artigo, existe também a nossa motivação pessoal, pois acreditamos que, saber reduzir custos e maximizar lucros, são conhecimentos de extrema importância em nosso mundo contemporâneo. Notou-se que, muitas vezes, não precisamos ter um conhecimento técnico da área, e sim um conhecimento prévio da matemática aplicada à programação linear, nos possibilitando encontrar a solução ótima para um determinado problema, ou em atividades mais complexas, como nas indústrias. Acreditamos também que, ao fazermos o uso adequado da otimização, estaremos aptos a melhores tomadas de decisões em nosso cotidiano.

Referências

ANDRADE, E. L. Introdução à pesquisa operacional: métodos e modelos para análise de decisões. 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
CHIANG, Alpha C. Matemática para economistas; tradutor Roberto Campos Moraes, São Paulo: McGraw-Hill do Brasil: Ed. da Universidade de São Paulo, 1982.

DAMM, Regina Flemming. Registros de representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Et al Educação matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

HILLIER, F. S. LIEBERMAN, G. J. Introdução à pesquisa operacional. 9 ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2013.

JUNIOR, A. C. G. SOUZA, M. J. F. Lindo: Manual de referência. Departamento de computação universidade federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2004.

PASSOS, E. J. P. F. Programação linear como instrumento da pesquisa operacional. São Paulo: Atlas, 2008

SANTOS, M. P. Programação Linear. Departamento de matemática Aplicada. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

SILVA, E. M. et. ali. Pesquisa operacional: para os cursos de administração e engenharia. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

TAHA, Hamdy A. Pesquisa Operacional. Tradução: Arlete S.

Marques. 8 ed. São Paulo: Pearson, 2008.

VIEIRA, Rizia dos Santos. Programação Linear: alguns métodos de otimização. 2017. TCC (Licenciatura em matemática). Centro universitário municipal de Franca, Franca. 2017.

PREVISÃO DOS CASOS DE COVID-19 UTILIZANDO REGRESSÃO LINEAR

Guilherme Henrique Custódio Rosa
Licenciando em Matemática - Uni-FACEF
guilhermehenriquecustodiorosa@hotmail.com

Letícia Faleiros Chaves Rodrigues
Mestre em Matemática - Uni-FACEF
Leticia_faleiros@msn.com

Resumo: O presente trabalho tem como objetivo estudar a regressão linear, conteúdo importante quando trabalhamos com coleta de dados e utilizar o mesmo para fazer previsões, porém, será feito um estudo aprofundado para entender seu funcionamento, obtenção de dados, construção de tabelas, dedução da fórmula que utilizamos para encontrar a reta que melhor se encaixa na função e gerando gráficos de modo a entender o comportamento da pandemia causada pelo COVID-19, comparando os resultados obtidos utilizando a regressão linear com os dados reais. Para entender melhor como funciona na prática, além de alguns exemplos manuais e utilizando softwares, será coletado dados de casos e óbitos no Brasil e em um município de Minas Gérias, obtendo grandes quantidades de dados para melhor precisão e com intuito de entender se utilizando esses recursos, o quão perto conseguimos alcançar e possíveis previsões, usando outra ferramenta que tem como objetivo dar apenas os valores necessários nas análises.

Palavras-chave: Coronavírus, Regressão linear, Séries.

1 Introdução

A análise de séries temporais é uma ferramenta essencial para a compreensão e previsão de padrões em dados que variam com o tempo. A aplicação de modelos estatísticos, como a autocorrelação e a análise sazonal, permite identificar a presença de correlações entre os dados e padrões sazonais em um conjunto de dados.

A regressão linear é uma técnica que permite modelar a relação entre duas variáveis, estabelecendo uma equação

que descreve essa relação. O método dos mínimos quadrados é frequentemente utilizado para estimar os parâmetros dessa equação. A avaliação da qualidade do ajuste da regressão pode ser feita através de métricas de acurácia e do p-valor, que permite determinar a significância estatística dos resultados.

Neste trabalho, aplicamos a técnica de regressão linear em dados relacionados à pandemia do COVID-19, utilizando o software R-Studio. A análise dos dados permitiu identificar tendências e padrões no número de casos e óbitos ao longo do tempo. Os resultados obtidos foram avaliados através de métricas de acurácia e do p-valor, para determinar a qualidade do ajuste do modelo e a significância estatística dos resultados.

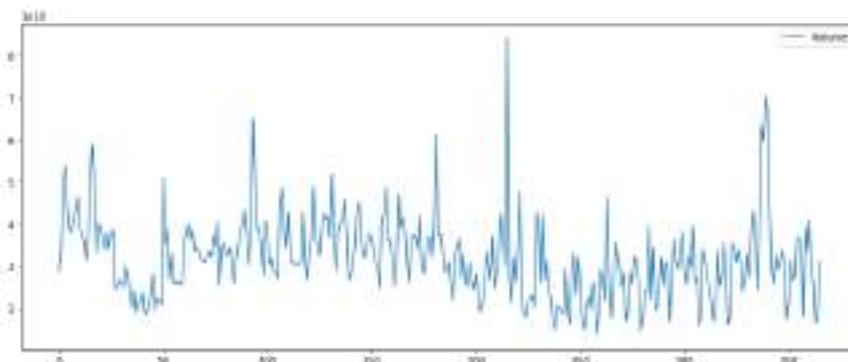
Em resumo, este trabalho apresenta uma análise das técnicas de análise de séries temporais, modelos estatísticos, regressão linear e métricas de acurácia, aplicados na análise dos dados relacionados à pandemia do COVID-19. A análise dos resultados obtidos pode fornecer informações importantes para a compreensão e previsão da evolução da pandemia.

2 Séries Temporais

Série Temporal é um conjunto de observações sobre uma variável, ordenado no tempo, e registrado em períodos regulares. O objetivo de sua análise é identificar padrões não aleatórios na série temporal de uma variável de interesse, e a observação deste comportamento passado pode permitir fazer previsões sobre o futuro, orientando a tomada de decisões. Segundo Corrar & Theóphilo (2004), uma série temporal é um conjunto de observações seqüenciais de determinada variável, expressas numericamente, obtidas em períodos regulares do tempo.

Um exemplo clássico de uma série temporal onde queremos identificar se determinada moeda atingiu a máxima ou mínima do seu valor.

Gráfico 1: Preço da criptomoeda Bitcoin.



Fonte: Autoria própria.

Este exemplo representa uma série temporal linear, pois, podemos escrevê-la na forma de somatório. Qualquer série temporal que não puder ser escrita da forma da equação 1 é uma série temporal não-linear. ()

O objetivo da análise de séries temporais é utilizar um modelo que seja capaz de identificar padrões não aleatórios na série temporal de uma variável de interesse. E assim, através da observação deste comportamento passado, pode-se fazer previsões sobre o futuro, auxiliando a tomada de decisão.

2.1 Modelos Estatísticos

Modelos de séries temporais são muito utilizados para avaliar o comportamento de uma variável ao longo do tempo. Uma sorveteria, por exemplo, tende a vender mais sorvete durante o verão, enquanto o mercado para as cafeterias costuma ser mais aquecido no inverno. Seria possível “prever” a demanda por sorvete para o verão de 2023? Na verdade, os modelos estatísticos para séries temporais utilizam o passado histórico da variável para projetar observações futuras. Dessa forma, se pode ter uma ideia, em média, de como a variável se comportará nos próximos

períodos.

Os modelos podem ser de:

- Autocorrelação: Observação num determinado instante está relacionado às observações passadas.
- Tendência: Padrão de crescimento/decrescimento da variável em um certo período de tempo.
- Sazonalidade: Padrões de comportamentos que se repetem em específicas épocas do ano.
- Estacionariedade: Variável que se comporta de forma aleatória ao longo do tempo ao redor de uma média constante.

Neste trabalho será utilizado modelos de Autocorrelação, cujo modelos estatísticos mais conhecidos, são os de Regressão Linear simples e o GLM (Modelos lineares generalizados), pois se mostram mais adequados na modelagem de variáveis em que as observações são independentes.

3 Análise de Regressão

A análise de regressão consiste na realização de uma análise estatística com o objetivo de verificar a existência de uma relação funcional entre uma variável dependente com uma ou mais variáveis independentes. Em outras palavras consiste na obtenção de uma equação que tenta explicar a variação da variável dependente pela variação dos níveis das variáveis independentes. Podendo ser uma regressão linear ou logística.

3.1 Regressão Linear

Regressão Linear simples é uma equação matemática que inclui somente duas variáveis e apresenta uma relação em linha

reta entre elas. É utilizado para prever comportamentos com base na associação entre duas variáveis quantitativas onde uma pode ser predita pela outra. Neste caso, a equação é dada por:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

Onde x é a variável independente e y é a variável dependente (variável a ser predita), β_0 e β_1 são os parâmetros da reta. Sendo β_1 a inclinação da reta (com β_1 positivo em relações diretamente proporcionais e negativo em relações inversamente proporcionais) e β_0 o ponto em que a reta cruza o eixo Y (quando X é igual a 0).

Porém, ao analisar experimentos, pode haver situações que a relação não seja perfeitamente linear, com isso, o modelo preditivo é descrito por:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

Onde ε representa a parcela de erro ou erro aleatório. A parcela de erro é responsável pela variabilidade de y em que não pode ser explicada pela relação linear entre x e y .

Porém, existem situações que a variável dependente será determinada por mais de uma variável independente. E assim, temos um modelo de **regressão linear múltipla** com k variáveis independentes, representado por:

$$y = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \dots + \beta_n x_{ni} + \varepsilon$$

Podendo ser representada matricialmente por,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_k \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Com isso, a reta de uma regressão linear multivariada pode ser dada por:

$$y = X\beta + \varepsilon$$

onde os subíndices n e K representam, respectivamente, o número de variáveis e o número de observações.

Logo, o objetivo é encontrar uma reta em que o parâmetro ε seja minimizado. Para isso, muitas técnicas podem ser utilizadas, uma das mais conhecidas é o Método dos Múltiplos Quadrados (MMQ) que será apresentada a seguir.

3.1.1 Método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados (MMQ) é utilizado para ajustar curvas a dados coletados em experimentos e para acompanhar ou projetar a evolução de um fato. Ou seja, é uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados. No caso da regressão, consiste em minimizar a soma dos quadrados dos resíduos, maximizando o grau de ajuste do modelo aos dados observados.

O objetivo é que minimizar a soma do quadrado dos resíduos $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$, e assim encontrar β_0 e β_1 que trarão a menor diferença entre a previsão de \hat{y} e o y realmente observado.

Substituindo ε_i , por $y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i$, temos

$$s(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

A minimização se dá ao derivar $S(\beta_0, \beta_1)$ em relação a β_0 e β_1 utilizando a regra da cadeia e então igualar a zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta_0} &= \frac{\partial S}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial S}{\partial x} &= 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \\ \frac{\partial x}{\partial \beta_0} &= -1 \\ \frac{\partial S}{\partial \beta_0} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \beta_1} &= -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \end{aligned}$$

Distribuindo e dividindo a primeira expressão por $2n$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{-2 \sum_{i=1}^n y_i}{2n} + \frac{2 \sum_{i=1}^n \beta_0}{2n} + \frac{2 \sum_{i=1}^n \beta_1 x_i}{2n} &= \frac{0}{2n} \\ \frac{-\sum_{i=1}^n y_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \beta_0}{n} + \frac{\beta_1 \sum_{i=1}^n x_i}{n} &= 0 \\ -\bar{y} + \beta_0 + \beta_1 \bar{x} &= 0 \\ \beta_0 &= \bar{y} - \beta_1 \bar{x} \end{aligned}$$

Onde \bar{y} é a medida amostral de y e \bar{x} é a medida amostral de x . Substituindo esse resultado na segunda expressão temos:

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y} + \beta_1 \bar{x} - \beta_1 x_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n [x_i (y_i - \bar{y}) + x_i \beta_1 (\bar{x} - x_i)] &= 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y}) + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i (\bar{x} - x_i) &= 0 \\ \beta_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n x_i (\bar{x} - x_i)} \end{aligned}$$

Logo, temos que o coeficiente angular da reta é dado por

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x})}$$

E o intercepto é dado por

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

3.1.2 Exemplo

Dado uma tabela com valores de x e y, os outros valores são calculados de acordo com o que a tabela pede e sendo a última linha o somatório das colunas.

Tabela 1: Exemplo manual de uma regressão linear.

x	y	x ²	y ²	xy
3	7	9	49	21
2	5	4	25	10
-1	-1	1	1	1
4	9	16	81	36
8	20	30	156	68

Fonte: Autoria própria.

Substituindo os valores encontrados em β_1 e β_0 temos, $\beta_1 = 2$ e $\beta_0 = 1$, logo a equação da reta será dada por

$$y = 2x + 1$$

Com os parâmetros β_0 e β_1 calculados, tem-se a reta com a soma dos quadrados dos erros minimizada. Vários métodos podem

ser utilizados para medir o quanto esse modelo representa de fato os dados observados, o que será apresentado no próximo capítulo

3.2.1 P-valor

O p-valor é utilizado para analisar as variáveis que se mostram significantes para o modelo. Assim, para avaliar a significância da variável independente com relação a variável dependente, supondo que a hipótese H_0 seja verdadeira, a probabilidade calculada de que a estatística de teste assuma um valor no mínimo tão extremo quanto o que, de fato se observou é chamado de valor P.

É comum adotar um valor de significância para o p-valor de 0,05, ou seja, com uma confiança de 95%, a variável independente impacta a variável resposta. Caso o valor seja superior a 0,05, ou seja, insignificante, a preditora não está associada a variável resposta, sendo então rejeitada.

3.2.2 Métricas de avaliação do modelo

As métricas utilizadas em modelos de regressão tem por objetivo estimar a quantidade de erros. Um modelo é considerado adequado para os dados se a diferença entre os valores observados e previstos for pequena. Uma das principais ferramentas para avaliar a qualidade de um algoritmo de regressão é o ME – Erro médio (ou Mean Error), o MSE - Erro Quadrático Médio (*Mean Square Error*), MAPE - Erro Percentual Médio Absoluto (*Mean Absolute Percentage Error*), bem como o coeficiente de correlação e de determinação R².

- **Correlation coeficiente ou kappa statistic** (coeficiente de correlação - cor) mostra a relação entre o valor das custas e o valor provisionado, este coeficiente varia

estritamente entre $-1 \leq x \leq 1$. Quanto mais próximo de zero este valor está, a relação é inexistente e quanto mais próxima aos extremos, a relação é muito forte, sendo, no caso negativo, uma relação muito forte inversa.

- **ME – Mean Error** ou Erro médio consiste apenas na média da série de erros de previsão e é dado por:

$$ME = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{y}_i - y_i$$

- **MSE – Mean Squared Error** ou Erro quadrático médio é uma das métricas mais populares e utilizadas em tarefas de regressão. Formalmente, é expressa pela média dos quadrados dos erros, isto é, a diferença quadrática média entre os valores reais e os valores estimados, dada por

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2$$

- **MAPE - Mean Absolute Percentage Error.** O MAPE significa Erro Percentual Médio Absoluto. Estas medidas expressam a porcentagem média dos erros (MAPE em valor absoluto) cometidos na previsão da série temporal; quanto menor esta medida, melhor será a previsão. A equação do MAPE é dada por:

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\hat{y}_i - y_i|}{|y_i|}$$

- **Coefficiente de determinação**, frequentemente chamado de R^2 , representa o poder de previsão do modelo como um valor entre 0 e 1. Zero significa que o modelo é aleatório (não explica nada) e 1 significa que há um ajuste perfeito. No entanto, deve-se ter cuidado ao interpretar valores de R^2 , pois valores baixos podem ser totalmente normais e valores altos podem ser suspeitos.

Desta forma, vimos o que é uma regressão linear, suas características e como avaliar um modelo linear. A seguir, será apresentado um exemplo, utilizando os dados da COVID-19, que é um vírus causador pertence à família SARS, mais precisamente o SARS-CoV-2.

4 Aplicação

A uso das séries temporais e a regressão linear será aplicado em análises relacionado ao Covid 19, utilizando o primeiro caso registrado até os dias atuais.

4.1 A pandemia causada pelo Covid-19.

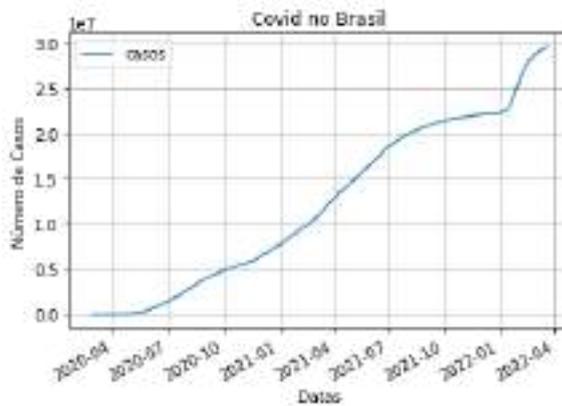
Estamos vivendo a pandemia do novo coronavírus desde o dia 11 de março de 2020. Inicialmente, em 31 de janeiro de 2020, a Organização Mundial da Saúde (OMS) declarou a infecção pelo novo coronavírus como emergência global e a seguir nomeou a doença de COVID-19. O Grupo de Estudos de Coronavírus do Comitê Internacional de Taxonomia de Vírus propôs que o vírus seja designado de SARS-Cov-2.

A transmissão do covid-19 é representada como um crescimento exponencial, é quando um número específico é multiplicado diariamente por um valor constante, de forma

que cresce rapidamente e parece se tornar matematicamente “incontrolável”, ou exponencial.

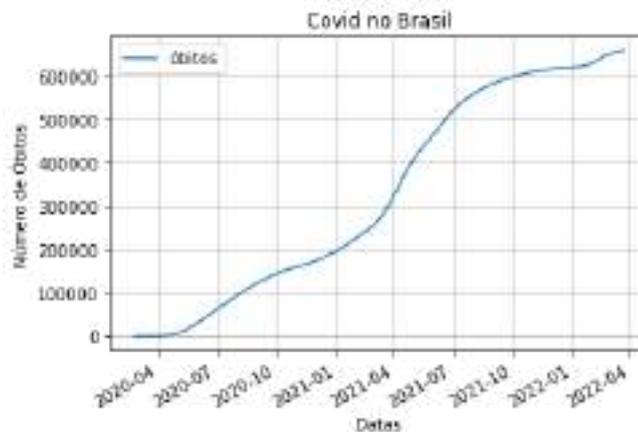
De acordo com o Coronavírus Brasil (saude.gov.br), do dia 25/02/2020 até a análise feita, foram registrados 29.641.594 casos de Covid-19 no Brasil e 657.302 óbitos. A seguir será apresentado dois gráficos que representam o avanço do número de casos e de óbitos no Brasil.

Gráfico 2: Avanço dos casos de Covid-19 no Brasil.



Fonte: Autoria própria.

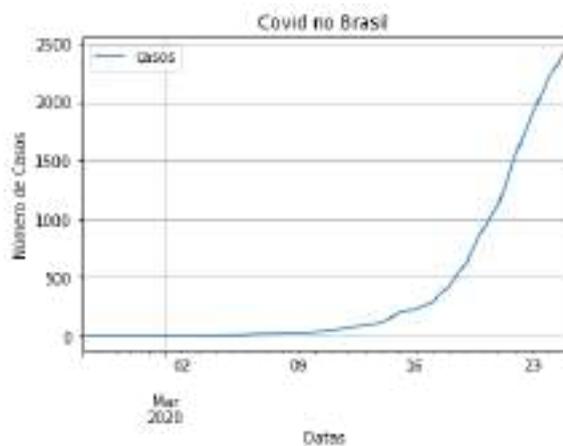
Gráfico 3: Avanço dos óbitos de Covid-19 no Brasil.



Fonte: Autoria própria.

Ao analisarmos e compararmos os gráficos acima, percebemos que eles não possuem nenhuma semelhança a uma função exponencial, porém, se observamos apenas o primeiro mês de casos teremos o seguinte caso:

Gráfico 4: Análise referente ao primeiro mês de pandemia.



Fonte: Autoria própria.

A curto prazo conseguimos visualizar a semelhança entre casos de Covid-19 em um mês e uma função exponencial. Em um determinado tempo, a curva começa a crescer com tendências a manter essa inclinação.

4.2 Aplicando a regressão linear simples

Os dados foram coletados no site oficial do governo <https://covid.saude.gov.br>, estes que se referem a quantidade de casos e de óbitos por dia no Brasil, desde o início da pandemia no país até 21/10/2022. Na tabela abaixo é possível verificar os primeiros dez dias e as variáveis analisadas na modelagem.

Tabela 2: Aplicação da regressão linear simples.

n	Data	QTD_Casos	QTD_Obitos
1	25/02/2020	0	0
2	26/02/2020	2	0
3	27/02/2020	0	0
4	28/02/2020	0	0
5	29/02/2020	2	0
6	01/03/2020	0	0
7	02/03/2020	0	0
8	03/03/2020	0	0
9	04/03/2020	2	0
10	05/03/2020	8	0

Fonte: Autoria própria.

Desta forma, com o intuito de prever a quantidade de óbitos dependendo da quantidade de casos que venha a ocorrer, foi aplicado a regressão linear simples, na qual obtivemos a seguinte equação.

$$y = 668,2702351 + 0,0120214x$$

Onde x é a quantidade de casos por dia e a quantidade de óbitos por dia. Os respectivos coeficientes foram obtidos através do software RStudio, onde também é possível verificar um p-valor inferior a 0,01, tendo uma confiança de 99% que a quantidade de casos impacta consideravelmente no número de óbitos.

Figura 1: Cálculo do p-valor.

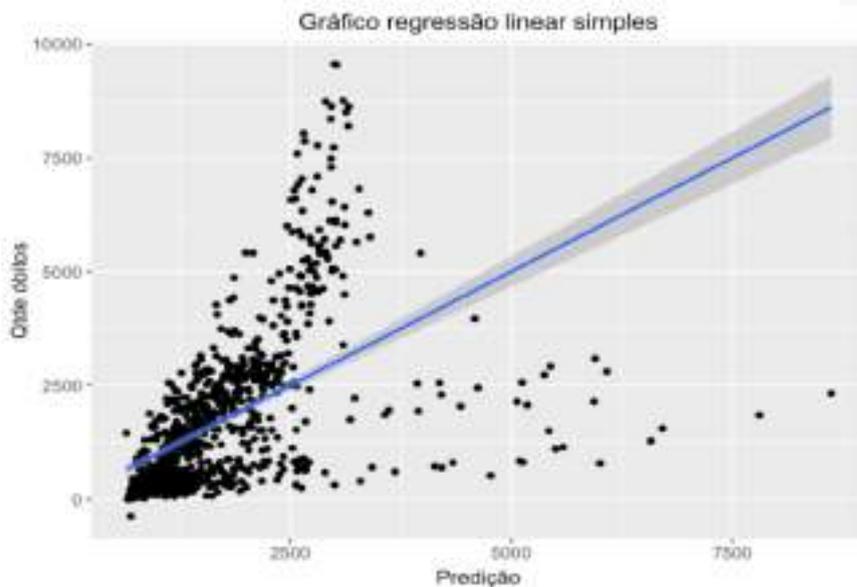
```

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value      Pr(>|t|)
(Intercept) 668.2702351  68.0819107   9.816 <0.0000000000000002 ***
QTD_Casos   0.0120214   0.0005951  20.202 <0.0000000000000002 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1452 on 968 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2966,    Adjusted R-squared:  0.2958
F-statistic: 408.1 on 1 and 968 DF,  p-value: < 0.0000000000000022
    
```

Quanto ao R^2 , ao utilizar apenas uma variável é normal que o valor não seja extremamente alto, onde foi observado o valor de $R^2 = 0,2958$. O gráfico gerado pelo modelo de regressão é apresentado na figura 1 abaixo.

Gráfico 5: Regressão linear simples.



Fonte: Autoria própria.

Tabela 3: Métricas.

Me	MAPE	MSE	Correlação
-0,000000000000228	57,98614	2105213	0,5445775

Fonte: Autoria própria.

Ou seja, com um índice de forte correlação entre a variável alvo e a variável independente que foi de 0,54 e uma média de erro (ME) inferior a 0,01, o modelo apresenta um bom ajuste. Além disso, é possível analisar os resíduos do modelo, que são as medidas de distância entre os dados observados e a reta estimada.

A Regressão Linear, para ser corretamente utilizada, precisa que os dados estejam de acordo com algumas condições assumidas pelo modelo:

- Normalidade dos Resíduos: é necessário que os resíduos gerados pelo ajuste da reta sigam distribuição Normal.
- Homocedasticidade: é necessário que a variância de Y seja constante para todos os valores de X
- Independência: é necessário que não exista estrutura de dependência entre os dados, para que os resíduos sejam independentes e identicamente distribuídos.

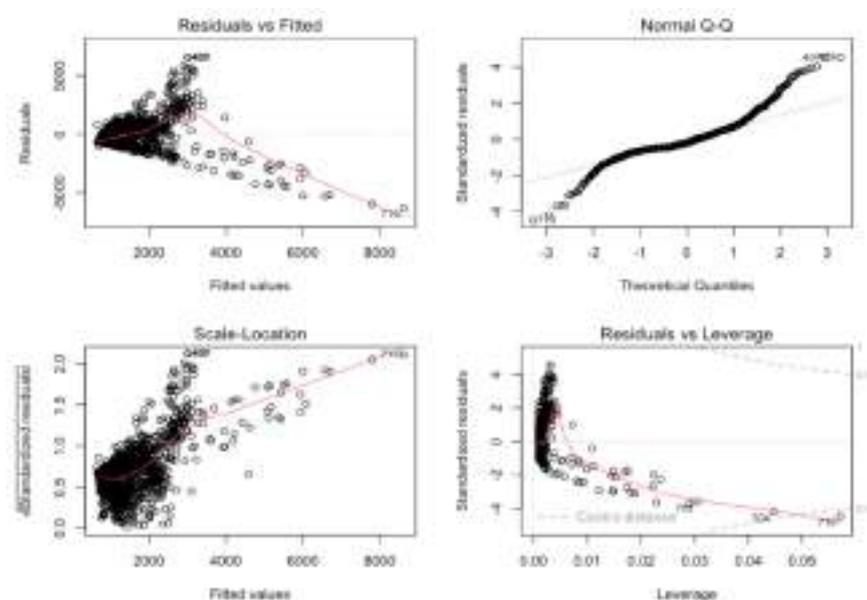
Realizando a análise de resíduos, obtivemos os seguintes gráficos abaixo 6 através do primeiro gráfico, pode ser observar a independência e a homoscedasticidade, devido os resíduos se distribuírem de uma maneira razoavelmente aleatória e com e mesma amplitude em torno do zero.

No segundo gráfico, podemos avaliar a normalidade dos resíduos, onde a linha diagonal pontilhada representa a distribuição normal teórica, e os pontos a distribuição dos resíduos observada, não havendo discrepância entre os pontos em relação à reta teórica.

O terceiro gráfico avaliando a aleatoriedade e amplitude dos pontos, porém os resíduos padronizados, os resíduos se distribuem de uma maneira razoavelmente aleatória.

E por fim, o último gráfico permite visualizar as Distâncias de Cook das observações, uma medida de influência que pode indicar a presença de outliers quando possui valor maior do que 1.

Gráfico 6: Resultado das análises.



Fonte: Autoria própria.

5 Considerações finais

A regressão linear é uma técnica estatística que pode ser aplicada em diversos tipos de dados, incluindo os dados relacionados ao COVID-19. Ela permite encontrar a relação entre duas variáveis e estabelecer uma equação que descreve essa relação. No caso do COVID-19, pode ser usada para analisar a evolução dos casos e óbitos ao longo do tempo, por exemplo.

A análise da regressão linear pode ajudar a identificar tendências e padrões nos dados relacionados ao COVID-19. Por exemplo, ela pode ser utilizada para verificar se o número de casos está aumentando ou diminuindo ao longo do tempo, ou para prever a evolução futura da pandemia. Além disso, a regressão linear pode ser usada para avaliar a eficácia de medidas de controle da pandemia, como o distanciamento social ou a vacinação.

Durante a análise dos dados do COVID-19 no Brasil e em um município de Minas Gerais utilizando a regressão linear, foi possível coletar informações importantes e encontrar a reta que melhor se adequa aos dados. A utilização do p-valor permitiu determinar quais variáveis eram estatisticamente significativas para a análise. A comparação dos resultados obtidos a partir dos cálculos manuais e dos softwares disponíveis mostrou que os softwares são mais eficientes na análise de grandes quantidades de dados e na criação de gráficos para visualização. Os gráficos gerados permitiram uma melhor compreensão do comportamento dos casos e óbitos durante a pandemia, enquanto a regressão linear permitiu identificar o padrão de crescimento dos dados. Com base nesses estudos, foi possível concluir que a proliferação do vírus apresenta um padrão crescente, como era de se esperar em uma pandemia onde a propagação é exponencial.

Em resumo, a regressão linear é uma ferramenta útil para analisar dados relacionados ao COVID-19 e pode fornecer informações importantes para o planejamento e gestão da pandemia.

6 Referências

BOSQUE, Leonardo Melo. ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS NÃO-LINEARES COM MODELOS AUTO-REGRESSIVOS THRESHOLD. *Análise de séries temporais*, [S. l.], p. 5-57, 10 nov. 2014. Disponível em: https://bdm.unb.br/bitstream/10483/10037/1/2014_LeonardoMeloBosque.pdf. Acesso em: 30 jun. 2022.

CORRAR, L.J. & THEÓPHILO, C.R. Pesquisa Operacional para decisão em contabilidade e administração. São Paulo: Editora Atlas, 2004.

MATUCHESKI, Silvano. Método dos Mínimos Quadrados. 2021. 139 f. Dissertação (Mestrado em Matemática - Nível de Mestrado Profissional) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel - PR.

OLIVEIRA, Bruno. Características das séries temporais. Data science, [s. l.], 12 fev. 2020. Disponível em: <https://statplace.com.br/blog/caracteristicas-das-series-temporais/>. Acesso em: 10 jan. 2022.

PETERNELLI, Luiz Alexandre. CAPÍTULO 9 - Regressão linear e correlação. In: Regressão linear. [S. l.], 23 nov. 2009. Disponível em: <http://www.dpi.ufv.br/~peterneili/inf162.www.16032004/materiais/CAPITULO9.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2022.

RODRIGUES, Francisco Xavier Pinheiro. Aprendizagem Automática Aplicada à Classificação de Faturas para a Declaração Periódica do IVA. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia Informática) - Faculdade de Ciências e Tecnologia,

STRABELLI, Tânia Mara Varejão; UIP, David Eveson. COVID-19 e o Coração. Coronavirus-19, [s. l.], 11 mar. 2020. DOI <https://doi.org/10.36660/abc.20200209>. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/abc/a/NWKKJDxLthWSb53XfV9Nhnv/?lang=pt>. Acesso em: 23 set. 2022.

Universidade Nova de Lisboa, [S. l.], 2019. Disponível em: <https://1library.org/document/q06oollq-aprendizagem-automatizada-aplicada-classificacao-faturas-para-declaracao-periodica.html#fulltext-content>. Acesso em: 12 set. 2022.

REGRESSÃO LINEAR SIMPLES: um estudo da ferramenta em Estatística

Ryan Felipe Luiz Alves
Licenciando em Matemática – Uni-FACEF
ryanfelipe2211@gmail.com

Lucinda Maria de Fátima Rodrigues Coelho
Doutora em Ciências – Uni-FACEF
lucindarcoelho@gmail.com

Resumo: Um modelo de Regressão é um modelo matemático que descreve a relação entre duas ou mais variáveis de tipo quantitativo. Se o estudo incidir unicamente sobre duas variáveis e o modelo matemático for a equação de uma reta, então designa-se por regressão linear simples. A Estatística nos dias de hoje é uma ferramenta indispensável para qualquer profissional que necessita analisar informações em suas tomadas de decisões diárias, seja no seu trabalho ou na sua vida pessoal. O ambiente em que as organizações convivem está em contínua mudança, e a busca pela melhor forma de sobrevivência tem se tornado uma tarefa cada vez mais difícil. Os consumidores estão em busca de produtos que lhes ofereçam alta qualidade por um menor custo. Este artigo tem por objetivo destacar os principais eventos relacionados com a história da Estatística e a Regressão Linear, bem como procura discutir os aspectos importantes para os estudos e análise desta ciência.

Palavras-chave: Estatística. Regressão Linear. Matemática.

Introdução

A estatística na atualidade tem contribuído de forma significativa para o processo de tomada de decisão, pois grande parte do que se faz é baseado em métodos quantitativos. Na era da informação e do conhecimento, a estatística utiliza a matemática para dar apoio aos profissionais da iniciativa privada, do governo e pesquisadores. O grande volume de informações produzido pelo mundo moderno precisa ser analisado de forma consistente e fidedigna. Esse suporte ocorre por meio da estatística. Onde houver incerteza, essa ferramenta pode ser usada.

O termo 'regressão' foi proposto pela primeira vez por Sir Francis Galton em 1885 num estudo onde demonstrou que a altura dos filhos não tende a refletir a altura dos pais, mas tende sim a regredir para a média da população. Atualmente, o termo "Análise de Regressão" define um conjunto vasto de técnicas estatísticas usadas para modelar relações entre variáveis e prever o valor de uma ou mais variáveis dependentes (ou de resposta) a partir de um conjunto de variáveis independentes (ou predictoras). (Maroco, 2003)

Levine (1998) resumidamente dita que a análise de Regressão é utilizada principalmente com o objetivo de previsão, ou seja, o propósito é desenvolver um modelo estatístico que possa ser utilizado de maneira eficiente e precisa para prever os valores de uma variável dependente ou variável resposta, tendo por base conhecimento nos valores de pelo menos uma variável independente ou explicativa.

Com base nas citações dadas, destaca-se ao que diz Levine (1998) sobre o modelo estatístico ou modelo de Regressão e complemento que "um modelo de Regressão é um modelo matemático que descreve a relação entre duas ou mais variáveis de tipo quantitativo. Se o estudo incidir unicamente sobre duas variáveis e o modelo matemático for a equação de uma reta, então designa-se por regressão linear simples" (Martins 2019).

Esta ferramenta Matemática possibilita a oportunidade por meio dos dados, de adentrar em estudos importantes com finalidades de aprimorar, tomar decisões e realizar análises de um determinado objeto seja ele na área social ou científica. A Regressão Linear é o foco principal da pesquisa a ser realizada, a fim de que se possa realizar uma imersão teórica nesta ciência e a compreensão do processo Matemático que nela é inserida com base nos seguintes estudos: diagrama de dispersão; tipos de Modelos de Regressão; determinação da Equação da Regressão Linear Simples; erro Padrão da Estimativa; medidas de Variação

na Regressão e na Correlação; Correlação – medindo a força da associação; pressupostos da Regressão e da Associação; análise de Resíduos; Medindo a Autocorrelação: A Estatística de Durbin-Watson; Estimativa de Intervalos; armadilhas na Regressão e Questões Éticas.

Os tópicos listados foram selecionados com base no livro de estudos “Estatística: Teoria e Aplicações”, publicado no ano de 1998, dos autores David M. Levine, Mark L. Berenson e David Stephan.

Estatística: Contexto histórico e definição

Com o desenvolvimento social e tecnológico do mundo contemporâneo, a Estatística vem se fazendo mais do que nunca uma importante ferramenta para o cunho social e científico em diversas áreas de estudos, deixando de ser encontrada somente em trabalhos acadêmicos. Ela é indispensável para os profissionais que necessitam analisar informações em suas tomadas de decisões diárias, seja no trabalho ou na vida pessoal, ou seja, a partir de análises de informações, tomar atitudes cabíveis dentro do contexto de modo não apenas indutivo. É indispensável para qualquer profissional o domínio das informações pertinentes ao seu trabalho. Tais informações obtidas por meio dos dados, se torna uma base consistente para a estatística e portanto, para uma análise científica.

Para Rao (1999), a Estatística é uma ciência que estuda e pesquisa sobre: o levantamento de dados com máxima quantidade de informações possíveis para um dado custo; para o processamento de dados na quantificação da incerteza existente na resposta; para um determinado problema na tomada de decisões sob condições de incerteza, sob o menor risco possível. O que faz jus a definição de Estatística dada por Farias, Soares e César no ano de 2003: “Estatística é uma ciência que se dedica ao desenvolvimento e

ao uso de métodos para a coleta de dados, resumo, organização, apresentação e análise de dados”.

Segundo Moore (2000), pode-se observar que a palavra “dados” e “Informação” acompanham a definição de estatística:

Não podemos escapar dos dados assim como não podemos evitar o uso de palavras. Tal como palavras, os dados não se interpretam a si mesmos, mas devem ser lidos com entendimento. Da mesma maneira que um escritor pode dispor as palavras em argumentos convincentes ou frases sem sentido, assim também os dados podem ser convincentes enganosos ou simplesmente inócuos. A instrução numérica, a capacidade de acompanhar e compreender argumentos baseados em dados, é importante para qualquer um de nós. O estudo da estatística é parte essencial de uma formação sólida”. (MOORE, 2000)

O dicionário Aurélio Buarque de Holanda Ferreira (1986), definiu-a como uma parte sólida da Matemática que se investigam os processos de obtenção, organização e análise de dados sobre uma população ou sobre uma coleção de seres. Precisa-se coletar dados para transformá-los em informações. Estatística é um conjunto de técnicas utilizadas para coletas de dados, organização, resumo, análise e interpretação do dado.

Como citado anteriormente, a estatística é um forte instrumento no mundo da era de informações, mas também foi reconhecida há milhares de anos atrás. O primeiro dado disponível foi o de registros da civilização egípcia, onde havia registros de egípcios presos nas guerras na data de 5000 a.C., e em 3000 a.C. para a falta de mão de obra na construção das pirâmides.

Já na era de Cristo o governador romano da Síria, Quirino, que incluía a Judéia e a Galileia, por ordem do senado, teve que fazer um recenseamento na qual as pessoas tinham que ser registradas no local de sua origem. No livro de Lucas cap. 2: 1-2 há um relato de que o imperador Augusto mandou uma ordem para que todos

do Império deviam se registrar para que fosse feita uma contagem da população. Com a apresentação desses fatos históricos pode-se entender melhor a origem da palavra “Estatística”, do latim “status” remetendo a estudo do estado e significava originalmente, uma coleção de informação de interesse. No fim do século XVIII o sentido que se empregava era de que era o estudo quantitativo de certos fenômenos sociais, destinados a informação dos homens de Estado, ou seja, fornecer informações aos governantes.

Com tais fatos descritos e definições, consegue-se observar que o estudo da Estatística é indispensável à qualquer profissional para o domínio das informações pertinentes ao seu trabalho, nesse trabalho aborda-se conceitos importantes para um melhor entendimento da Regressão Linear.

Dados e informação

Oxford online de inglês (2013, tradução nossa) registra as seguintes definições e origem do termo plural dados (data): Substantivo (usado como singular ou plural):

- Fatos e estatísticas coletadas juntas para fim de referência ou análise.
- Computação de quantidades, caracteres ou símbolos em que as operações são executadas por um computador, sendo armazenados e transmitidos na forma de sinais elétricos, e gravados em mídias de gravação magnética, óptica ou mecânica.
- Em filosofia: coisas conhecidas ou assumidas como fatos, e constituindo a base do raciocínio ou cálculo.
- Origem: Meados do século dezessete (como um termo filosófico): Em latim, data é o plural de datum. Historicamente e em áreas científicas especializadas, o termo data, em inglês, é tratado como plural, tendo um verbo correspondente no plural, como na frase: ‘dados foram coletados e classificados’. Em se tratando, no entanto, de uso moderno não científico,

data geralmente não é empregado como um termo plural. Em vez disso, é tratado como um substantivo incontável (mass noun ou uncountable noun), semelhante a uma palavra como informação, levando um verbo correspondente no singular. Frases como 'os dados foi (the data was) coletado ao longo de vários anos' são agora amplamente aceitas em inglês padrão.

Analisando a definição dada pelo dicionário Oxford, pode-se ter uma visão clara e consistente da palavra "dados". Observando ainda no contexto filosófico como descrito, vemos que há uma grande importância na concepção dos dados e para que serve quando a citação o descreve como fatos conhecidos e fazendo uso dos mesmo para uma base para estudos de cálculo ou raciocínio. De imediato, esse estudo dos fatos - ou melhor dizendo, Dados - nos apresenta de forma sucinta a informação, ou seja, em suma podemos dizer que a Informação é os resultados dos estudos de um conjunto de dados. O Dicionário Português-Latino (TORRINHA, S.d., p. 669) apresenta o seguinte quadro de definições:

Informação: f. Indagação sobre alguém ou alguma coisa, comunicação: indagativo, f. investigatio, f. disquisitio, f. percontatio, f. cic. 1. Ir tirar informações: inquisitum ire, cic. // Tirar informações a alguém: exquirere ou percontari ab aliquo, cic. // Tirar informações exatas: diligentius cuncta cognoscere, curt., // Dar ou transmitir informações a alguém: certioem facere aliquem (de re aliqua), liv., docere aliquem ali quid, cic. // Receber informações: cognoscere ou audire aliquid (de aliqua re).

Segundo Basso (2020), os dados nada mais são do que os registros de um atributo. A informação é o resultado da análise, processamento e manipulação dos dados. O autor ainda atrela à definição dada, mais dois conceitos dito importantes sendo eles o conhecimento e a sabedoria. O conhecimento é a forma como as informações são interpretadas, ou seja, vem da contextualização,

da organização e padronização da informação, é a estratégia de colocar as informações em prática. Por fim a sabedoria é a percepção de todo o contexto, é todo o resultado da análise, as formulações e hipóteses aplicadas a um cenário.

Os dados estão presentes a todo momento em nossas vidas, principalmente após a Segunda Guerra Mundial, com o avanço das tecnologias e estudos da área.

Hoje estamos conectados digitalmente desde que acordamos até a hora de dormir, absorvendo um volume muito grande de conteúdo e gerando muito conteúdo. Esse fenômeno acontece no nosso dia a dia, seja em casa ou no trabalho. Aliás, esta é outra transformação. [...] A computação está se tornando tão ubíqua que fica praticamente impossível separar o mundo físico com o digital. Hoje estamos começando a ver claros sinais da hiperconectividade com a computação em nuvem, a evolução da internet das coisas permeando a sociedade (TAURIM, 2013, s.p.)

As ferramentas tecnológicas e digitais são fontes de uma série de informações sobre o nosso comportamento social. Segundo Amaral (2016), os dispositivos portáteis pessoais conectados e integrados, veículos e outros dispositivos são ricas fontes de dados. Pode-se observar por exemplo um simples acesso realizado em alguma loja virtual para se comprar determinado produto. O mesmo após algum tempo aparece de maneira publicitária em alguma rede social como o Facebook para fim de incentivo a compra. Isso se deve a algoritmos inteligentes que coletam seus acessos em determinados sites a favor da empresa de vendas associada, cujo objetivo é vender mais. Com este simples exemplo observa-se o poder que os dados possuem, desde que usados da maneira correta dentro do contexto prescrito.

Todos os dados que as companhias armazenam ao longo dos anos ajudam nos processos de gerações de conhecimento. As evoluções tecnológicas, sempre provocam impactos nos ambientes

corporativos. Nesse sentido, Pinheiro, (2005), explica que

A Ciência da Informação tem dupla raiz: de um lado a Bibliografia/Documentação e, de outro, a recuperação da informação. Na primeira o foco é o registro do conhecimento científico, a memória intelectual da civilização e, no segundo, as aplicações tecnológicas em sistemas de informação, proporcionadas pelo computador. No entanto, foram a Ciência e Tecnologia os elementos fertilizadores e propulsores de seu nascimento, fruto do crescimento de equipes científicas, do aumento do número de cientistas e pesquisadores e da aceleração de pesquisas, portanto, de tecnologias, esforços decorrentes sobretudo da Segunda Guerra Mundial. (PINHEIRO, 2005, p.38)

Existe toda uma ciência para o armazenamento dos dados no famoso Big Data (grades dadas) e Data Warehouse (armazém dos dados), conceitos que não serão abordados nesse artigo, mas que valem a pena serem citados. A ciência de dados é focada na análise e estudo dos dados, sua finalidade é buscar conhecimento acerca de soluções e problemas (insights), assim como auxilia na tomada de decisões. Trata-se de uma área conectada com a mineração de dados.

Segundo Amaral (2016), antes de se entender a ciência de dados precisa-se compreender toda a matéria prima, isto é, dados, informações, conhecimento e sabedoria, a chamada pirâmide do conhecimento. Sendo assim, ressalta-se a importância para a compreensão do conteúdo dito, de maneira em que se possa aplicar em áreas específicas, dados, informação, conhecimento para tomadas de decisões sábias.

As ferramentas da Estatística se tornam extremamente importantes para todo processo de medição e estruturação dos Dados para fim de conhecimento e tomada de decisões. A Regressão Linear é um conhecimento matemático no qual se envolve com todas as questões abordadas, e é foco central deste trabalho.

Depois de abordados resumidamente alguns conceitos importantes da partição teórica do trabalho, a seguir será apresentada a Regressão Linear.

Regressão linear simples

A utilização da estatística está disseminada nas universidades, nas empresas privadas e públicas. Gráficos e tabelas são apresentados na exposição de resultados das empresas. Dados numéricos são usados para aprimorar e aumentara produção. Censos demográficos auxiliam o governo a entender melhor sua população e organizar seus gastos com saúde, educação, saneamento básico, infraestrutura, entre outros. Com a velocidade da informação, a estatística passou a ser uma ferramenta essencial n produção e disseminação do conhecimento. O grau de importância atribuído a ela é tão grande que praticamente todos os governos possuem organismos oficiais destinados à realização de estudos estatísticos.

A **análise de regressão** é utilizada principalmente com o objetivo de previsão (LEVINE 2000). O modelo de regressão linear, segundo Krajewski, Ritzman e Malhotra (2009), é um dos modelos causais mais conhecidos e utilizados, que consiste de uma variável chamada de dependente estar relacionada a uma ou mais variáveis independentes por uma equação linear. Pode-se dizer em uma linguagem técnica que a linha de regressão minimiza os desvios quadrados dos dados reais.

A **regressão linear** simples é uma metodologia que estuda a relação entre dois fenômenos, permitindo entender o efeito e a causalidade entre eles, além de prever novos valores. Para melhor compreensão, deve-se entender como ajustar a reta, interpretar e prever valores.

Ajuste da reta

A relação entre dois fatores é estudada pela regressão linear simples por meio de uma fórmula que desenha uma reta. Para entender melhor essa relação é usada um dos estudos do economista John Keynes. Ele concluiu que **os indivíduos tendem a aumentar o seu consumo conforme sua renda aumenta**. Essa é uma versão simplificada da função de consumo.

Tabela 1: Função consumo

	Gasto	Renda
1	3011	9714
2	1305	3728
3	1879	6062
4	2654	8845
5	2849	8378

Fonte: Autores

Na tabela 1, visualiza-se as cinco primeiras observações do conjunto de dados que serão utilizadas para criar uma relação entre **gasto** e **renda** da seguinte forma:

$$\text{Gasto} = \beta_0 + \beta_1 \text{Renda}$$

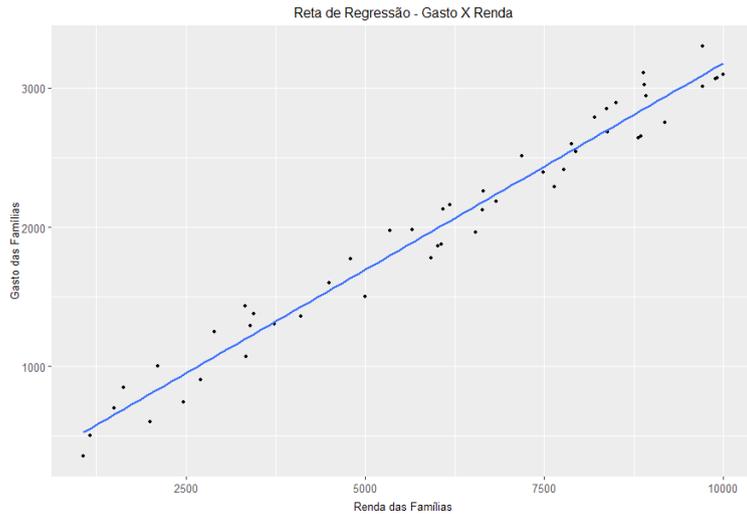
Aqui, cada componente representa um conjunto de valores, sendo:

- **Gasto:** gasto ou consumo das famílias
- **Renda:** renda disponível
- **Q0:** consumo quando o rendimento é zero
- **Q1:** propensão marginal a consumir

Usando o conjunto de dados como exemplo, essa função

$Gasto = 207.9 + 0.3Renda + erro$ obtido pelo método dos mínimos quadrados, será deduzida a seguir:

Gráfico 1: Gasto x Renda



Fonte: Ana Duarte (2022).

Percebe-se que quanto menor a renda (Y) menor é o gasto das famílias (X). Ao centro, há uma nuvem de pontos na qual foi ajustada uma reta linear crescente que permite entender o comportamento médio dos gastos familiares. Mas, como passar da função $Gasto = Q_0 + Q_1Renda + erro$ para $Gasto = 207.9 + 0.3 Renda + erro$?

Independente dos seu conjunto de dados, será ajustada uma reta que genericamente pode-se representar pela função abaixo:

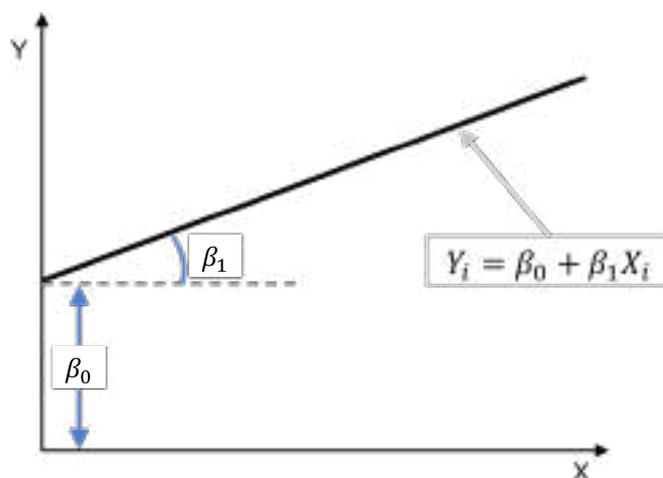
$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + e$$

Varável resposta Intercepto Coeficiente angular Variável explicativa Erro

Em que Y é o conjunto de valores que depende de uma

explicação e X é a variável independente e explicativa. No Exemplo 1, o gasto da família depende da sua renda. O Q_0 também chamado de *intercepto* é o valor de Y quando o X_i é zero, o Q_1 , o *coeficiente angular*, representa a taxa de variação e o quão inclinada essa reta será apresentada.

Gráfico 2: Taxa de variação



Fonte: Autores

Os dois parâmetros, Q_0 e Q_1 , são desconhecidos e precisam ser estimados, um dos processos mais utilizados para estimação desses coeficientes é o **método dos mínimos quadrados**. Esse método cria uma reta mais próxima possível dos valores disponíveis e determina qual a diferença entre o valor real de Y e o valor esperado é mínimo.

A partir dos dados e desse processo de estimação, calcula-se os β com as seguintes fórmulas:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$\beta_1 = \frac{50 \times 716.683.794 - 303275 \times 100556}{50 \times 2.198.628.939 - (303275)^2} = \frac{5338068800}{17955721325} = 0,297$$

$$\beta_0 = 2011.12 - 0,297 \times 6065.5 = 207,9$$

Obtendo-se:

$$\mathbf{Gasto = 207,9 + 0,3Renda + erro} \quad (1)$$

Percebe-se que nem todos os pontos estão alinhados na reta ajustada. Para isso, é necessário adicionar o erro na equação (1), **e**, que é justamente a diferença entre o **valor observado e o valor fornecido**** pela equação.

- Interpretando os valores :

$$\mathbf{Gasto = Q0 + Q1Renda + e \text{ para } Gasto = 207,9 + 0,3Renda + e}$$

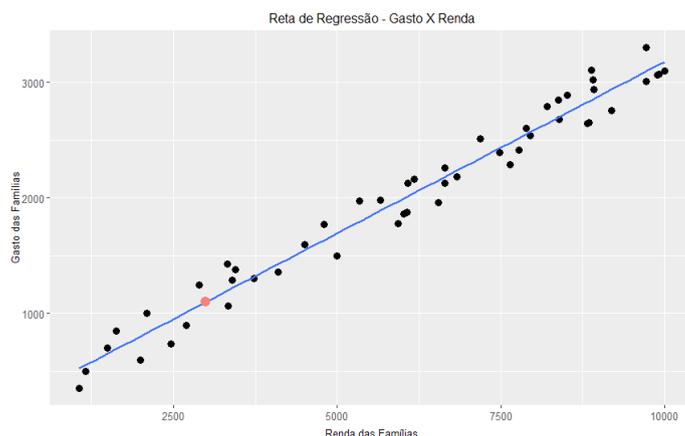
e entender o que cada valor significa na prática.

- Q0 é 207,9, ou seja, o consumo (quando não há renda) é de 207,90 reais;
- o coeficiente relacionado à renda (Q1) indica que, a cada um real a mais na renda, o gasto médio esperado aumentou em média, 0,30 reais. Dessa forma, quantifica-se o efeito da renda sobre o gasto.

- Prevendo valores:

Imagine que uma família possui renda de 3 mil reais, quanto seria o gasto estimado segundo nosso modelo? Pode-se substituir 3.000 na fórmula e obter um gasto esperado estimado de $Gasto = 207,9 + 0,3*(3000) = 1107,9$.

Gráfico 3: Valores estimados

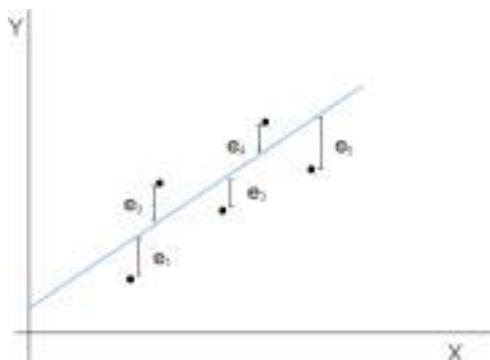


Fonte: Ana Duarte (2022).

O ponto rosa no gráfico mostra o valor predito baseado na renda de três mil reais de renda familiar. Lembrando que a reta de regressão é capaz de quantificar a relação entre as variáveis explicativas e resposta e de prever um novo valor.

Há outros detalhes da teoria, mas, de forma geral, a regressão linear é uma metodologia que estuda a relação entre dois fenômenos. Por meio de uma fórmula, é possível compreender o efeito que a variável explicativa tem sobre a variável resposta, além de fazer previsões de novos valores.

Gráfico 4: Taxa de erros



Fonte: Autores

Conhecidos todos os integrantes da regressão linear, é importante saber que a variável resposta depende de outros fatores, deve ser quantitativa, ou seja, deve apresentar valores numéricos.

Nesse caso, a variável resposta é o gasto familiar.

Se o que se procura estudar não estiver disposto em valores numéricos, capazes de tirar média e outras métricas, a regressão linear não é o método mais apropriado. Nesse caso, pode-se usar outras metodologias, como a regressão logística ou métodos de classificação.

Considerações finais

Com os relatos destacados neste artigo, conseguimos observar brevemente a importância e o quão enriquecedora é a ferramenta matemática estudada. A Regressão Linear nos dá uma ampla visão técnica dos objetos estudados e ter todo o domínio e conhecimento do tema é imprescindível para uma aplicação eficaz, com resultados em que podemos fazer bom uso, seja qual for o local de aplicação.

Com isso, é de suma importância que o tema abordado neste artigo, desperte a faça com que pesquisadores da área conheçam e entendam as aplicações da Estatística e o manuseamentos dos dados, para que assim, faça um uso benéfico científico e social com a Matemática.

Referências

ANDRADE, M. M. de. *Introdução à metodologia do trabalho científico: elaboração de trabalhos na graduação*. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

JAMES, D.E.; THROSBY. *Métodos quantitativos aplicados à economia*, Tradução de Carlos Roberto Vieira Araújo, São Paulo: Atlas, 1977.

KARMEL, P. H; POLASEK, M. *Estatística geral e aplicada para*

economistas, Tradução de José Pereira Lima, 2ª ed. São Paulo: Atlas, 1974.

KAZMIER, Leonard J. *Estatística aplicada à economia e administração*. Tradução de Carlos Augusto Crusius, São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982.

LEVIN, J. *Estatística Aplicada às Ciências Humanas*. São Paulo: Ed. Harbra, 1987

MOORE, D. *A Estatística Básica e sua prática*. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 2000.

Souza, S.G.; *Introdução aos Modelos de Regressão Linear e Não-Linear*. Embrapa Produção de Informação, 2001.

VIEIRA, S. *Elementos de Estatística*. São Paulo: Ed. Atlas, 1999.

TRANSTORNO ESPECÍFICO DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: DISCALCULIA

André Borges Peixoto
Licenciando em Matemática – Uni-FACEF
andreborgespeixoto@gmail.com

Profa. Ms. Adriana Aparecida Silvestre Gera Ribeiro
Mestre em Psicologia – Uni-FACEF
dricaasg@hotmail.com

Resumo: Atualmente, são vários os desafios enfrentados por professores no contexto escolar. Um destes se refere ao ensino de conteúdos escolares para alunos que possuem necessidades educacionais especiais, ou seja, aqueles estudantes que, por algum motivo, não conseguem acompanhar o ritmo do processo ensino-aprendizagem proposto pela escola. Sendo assim, o presente artigo tem o objetivo de discutir brevemente as características de quem possui um dos Transtornos Específicos de Aprendizagem (TEA), a discalculia, assim como apresentar alguns recursos materiais e didáticos, além de algumas estratégias metodológicas que podem ser utilizados para o ensino dos conteúdos matemáticos para os discalcúlicos. Para tanto, foi realizado um levantamento bibliográfico a respeito dos tópicos mencionados.

Keywords: Transtorno específico de aprendizagem matemática. Discalculia. Recursos materiais e didáticos. Estratégias metodológicas.

1 Introdução

Atualmente, um dos desafios enfrentados por professores no contexto escolar se refere aos alunos que apresentam necessidades educacionais especiais, ou seja, aqueles alunos que por algum motivo não conseguem aprender de acordo com o que é proposto e esperado para sua idade e seu nível escolar. Rozek e Serra (2015, p. 167) pontuam que essa “não aprendizagem pode ser compreendida como uma das causas do fracasso escolar, entendido como uma resposta insuficiente do aluno às exigências e demandas da escola”.

Vale salientar que ao revisar a literatura, dando ênfase aos diferentes termos usados para identificar o aluno que não aprende, verificou-se que há uma falta de concordância sobre as definições e conceitos entre os autores que pesquisam o assunto, assim como a apresentação de parâmetros dos fatores que podem ser considerados como causas intrínsecas e extrínsecas também é confusa e contraditória (ROCHA, 2004 apud TULESKI; EIDT, 2007).

Contudo, há um consenso entre alguns autores que diferenciam, dentre os alunos que não conseguem aprender, aqueles que possuem dificuldades de aprendizagem (DA) e os que possuem transtornos específicos de aprendizagem (TEA), também denominados por alguns teóricos de distúrbios de aprendizagem (CORREA; MARTINS, 2005, TULESKI; EIDT, 2007; KAUARK; SILVA, 2008, CORTEZ; FARIA, 2011, SANTOS; PEREIRA, 2012, CARVALHO; CIASCA; RODRIGUES, 2015, FRANCESCHINI et al., 2015, SANTOS, 2015 apud DOMINGOS, 2018).

As dificuldades de aprendizagem (DA) podem ocorrer por diversos fatores que podem impedir que a pessoa adquira conhecimentos como, por exemplo, dificuldades para escrever, ler, interpretar, associar, fazer cálculos matemáticos etc. (DOMINGOS, 2018).

Santos (2015, p. 24) acrescenta que:

[...] as dificuldades de aprendizagem podem ocorrer devido a fatores orgânicos, intrínsecos ao indivíduo e extrínsecos, ou seja, contextuais ou mesmo emocionais, bem como pela combinação destes, descobrir o problema o quanto antes, pode auxiliar o desenvolvimento no processo educativo da criança evitando prejuízos em sua aprendizagem.

Sendo assim, pode-se afirmar que há vários fatores envolvidos nas dificuldades de aprendizagem (DA) e estes estão relacionados à questões internas e externas, biológicas, afetivas, familiares que têm impacto direto no desempenho escolar do

indivíduo.

Nesta perspectiva, compreende-se que as dificuldades de aprendizagem (DA) não se restringem a apenas uma causa e que a atuação pedagógica pode tanto contribuir quanto prejudicar o desempenho do aluno, caso estas dificuldades não sejam detectadas precocemente ou caso sejam feitos um diagnóstico e uma intervenção inadequados (DOMINGOS, 2018).

Já os transtornos específicos de aprendizagem (TEA) estão relacionados, de modo geral, à alguma disfunção neurológica. Segundo Ciasca e Rossini (2000 apud GIMENEZ, 2005), o transtorno/distúrbio implica na perturbação do processo de aquisição, utilização ou na habilidade de resolver problemas. Sendo assim, este conceito possui um significado mais restrito que envolve uma disfunção geralmente neurológica e/ou neuropsicológica específica.

A definição mais aceita atualmente, uma vez que é considerada a mais completa, é a apresentada pelo National Joint Committee of Learning Disabilities (NJCLD), a qual foi proposta por Hammill em 1981 e, posteriormente, ratificada em 1990.

Distúrbio de Aprendizagem é um termo genérico que se refere a um grupo heterogêneo de desordens, manifestadas por dificuldades na aquisição e no uso da audição, fala, escrita e raciocínio matemático. Essas desordens são intrínsecas ao indivíduo e presume-se serem uma disfunção de sistema nervoso central. Entretanto, o distúrbio de aprendizagem pode ocorrer concomitantemente com outras desordens como distúrbio sensorial, retardo mental, distúrbio emocional e social, ou sofrer influências ambientais como diferenças culturais, instrucionais inapropriadas ou insuficientes, ou fatores psicogênicos. Porém, não são resultado direto destas condições ou influências (HAMMILL, 1990 apud GIMENEZ, 2005, p. 79-80).

Correia (2007 apud PASSOS et al., 2011) acrescenta que um transtorno específico de aprendizagem (TEA) se refere ao modo como o indivíduo processa a informação, considerando suas capacidades e o conjunto das suas realizações. O autor ainda pontua que este transtorno pode se manifestar na fala, na leitura, na escrita, na matemática e/ou na resolução de problemas e não estar relacionado às privações sensoriais, deficiência mental, problemas motores, déficit de atenção, perturbações emocionais ou sociais, embora possa ocorrer concomitantemente e ainda modificar a forma como o indivíduo interage com o seu meio.

Segundo o DSM V (2014, p. 68):

O transtorno específico de aprendizagem é um transtorno do neurodesenvolvimento com uma origem biológica que é a base das anormalidades no nível cognitivo as quais são associadas as manifestações comportamentais. A origem biológica inclui uma interação de fatores genéticos, epigenéticos e ambientais que influenciam a capacidade do cérebro para perceber ou processar informações verbais ou não verbais com eficiência e exatidão.

Portanto, observa-se que a disfunção neurológica que leva a falhas no funcionamento do sistema nervoso central (SNC) é a característica fundamental que diferencia as crianças que possuem transtornos/distúrbios específicos de aprendizagem (TEA) daquelas que possuem dificuldades de aprendizagem (DA) (ROCHA, 2004 apud TULESKI; EIDT, 2007).

Dentre aqueles indivíduos que possuem transtornos específicos de aprendizagem (TEA), há aqueles que possuem dificuldades no processamento numérico e em cálculos básicos, o que prejudica o desempenho escolar e o desempenho em atividades cotidianas que requerem a manipulação de números. Este transtorno é denominado discalculia.

2 Discalculia X Acalculia

Os primeiros estudos sobre as dificuldades relacionadas aos cálculos numéricos datam de 1919 e foram realizados por um neurologista chamado Henschen, o qual realizou pesquisas com mais de 260 pacientes que possuíam algum tipo de dificuldade nas suas habilidades numéricas. Na época, Henschen denominou este transtorno de acalculia (GONZÁLEZ; FREIRE, 2021).

Posteriormente, com os avanços nas pesquisas a respeito do assunto, os distúrbios relacionados às habilidades matemáticas passaram a ser classificados em dois tipos: acalculia e discalculia (BASTOS, 2008 apud PASSOS et al., 2011).

Tanto a acalculia como a discalculia podem ser diagnosticadas em crianças com inteligência normal. Contudo, a diferença entre estes dois distúrbios está no fato de que o primeiro, a acalculia, manifesta-se após uma lesão cerebral, ou seja, o indivíduo já havia adquirido as habilidades aritméticas, mas as perde após sofrer uma lesão. Já a discalculia ou discalculia do desenvolvimento é definida pela Academia Americana de Psiquiatria, segundo Bastos (2008 apud PASSOS et al., 2011, p. 66), como a dificuldade em “aprender matemática, com falhas para adquirir adequada proficiência neste domínio cognitivo, a despeito de inteligência normal, oportunidade escolar, estabilidade emocional e necessária motivação”.

De acordo com Campos (2015, p. 21), a palavra “discalculia vem do Grego e significa dis + cálculo, ou seja, dificuldade ao calcular”. Já Novaes (2007 apud ALVES; LEITE, 2011, p. 18) afirma que “a palavra discalculia vem do grego (dis, mal) e do latim (calcular, contar) formando contar mal”. O autor ainda salienta que a palavra *calcular* vem de cálculo e significa seixo ou um dos contadores em um ábaco.

No que se refere à discalculia, enquanto distúrbio, Silva (2008) ressalta que este é um distúrbio neuropsicológico que

afeta a capacidade de realizar operações matemáticas e afeta o raciocínio lógico-matemático de quem o possui, mesmo este indivíduo tendo inteligência normal. Bernardi (2006) ainda pontua que a discalculia está associada, principalmente, a pessoas que apresentam dificuldades durante a aprendizagem das habilidades matemáticas.

De acordo com Johnson e Myklebust (1983 apud SILVA, 2008, p. 16), “este transtorno não é causado por deficiência mental, nem por déficits visuais ou auditivos, nem por má escolarização”. Bernardi (2006) também salienta que a discalculia não é causada por lesões em regiões do cérebro.

O termo foi referido por Garcia (1998 apud BERNARDI, 2006) como discalculia ou discalculia de desenvolvimento, caracterizando-a como uma desordem estrutural da maturação das capacidades matemáticas, sem manifestar, no entanto, uma desordem nas demais funções mentais generalizadas.

Pesquisas apontam que a prevalência da discalculia gira em torno de, aproximadamente, 5% a 15% em crianças que frequentam as escolas regulares dos Anos Finais do Ensino Fundamental, devido ao deficitário desenvolvimento e funcionamento das estruturas cognitivas em seus diferentes domínios (BERNARDI; DIETER STOBÄUS, 2011).

3 Caracterização da discalculia

De acordo com Bernardi (2006), a discalculia é dividida em seis subtipos:

1. Discalculia verbal: dificuldade na nomeação dos termos e símbolos matemáticos;
2. Discalculia Practoginostica: a característica central é a dificuldade de manipulação da Matemática em forma de imagem ou algum objeto palpável;

3. Discalculia Léxical: dificuldade específica na compreensão da leitura dos símbolos matemáticos;
4. Discalculia Gráfica: dificuldade específica na compreensão da escrita dos símbolos matemáticos;
5. Discalculia Ideognóstica: dificuldade específica na realização das operações de forma mental e a não compreensão dos conceitos matemáticos;
6. Discalculia operacional: dificuldade específica na execução do cálculo utilizando os números juntamente com as operações.

Além das características específicas de cada subtipo da discaculia, Nascimento (2014) destaca que a discaculia compromete várias habilidades como: habilidades linguísticas (compreender ou nomear termos, operações ou conceitos matemáticos e transpor problemas escritos para símbolos matemáticos), habilidades perceptivas (reconhecer ou ler símbolos numéricos ou aritméticos e agrupar objetos em conjuntos), habilidades de atenção (copiar corretamente números ou cifras, lembrar de somar os números “levados” e observar os sinais das operações) e habilidades matemáticas (seguir etapas matemáticas, contar objetos e aprender tabuadas de multiplicação).

Além do comprometimento destas habilidades, o transtorno também pode afetar alguns processos cognitivos, levando o indivíduo a apresentar dificuldades relacionadas a estes como: dificuldade na memória de trabalho; dificuldade de memória em tarefas não-verbais; dificuldade na soletração de não-palavras (tarefa de escrita); dificuldade na memória de trabalho que implica contagem; dificuldade nas habilidades viso espaciais e dificuldade nas habilidades psicomotoras e perceptivo-táteis (NASCIMENTO, 2014). Bernardi e Dieter Stoubäus (2011) acrescentam que estudos na área da Neuropsicologia demonstram que essas dificuldades citadas acima evidenciam que as funções neuropsicológicas

indispensáveis aos processos de realização de cálculos não estão suficientemente desenvolvidas.

Sendo assim, Nascimento (2014) afirma que um discalculico apresenta lentidão na velocidade de trabalho por causa da dificuldade em memorizar a tabuada e sequências; problemas com orientação espacial, pois não sabe posicionar números de uma operação na folha de papel; dificuldades de visualizar conjuntos de objetos dentro de um conjunto maior; conservar a quantidade, o que o impede de compreender que 1 quilo é igual a quatro pacotes de 250 gramas; lidar com operações (adição, subtração, multiplicação e divisão); sequenciar números (antecessor e sucessor); classificar números, além de muitos outros fatores.

Vale salientar ainda que, de acordo com Bernardi e Dieter Stoubäus (2011), além da discalculia afetar a dimensão cognitiva, esta também afeta a dimensão afetivo-social do discalculico, principalmente no que se refere à autoestima e autoimagem. A autoestima refere-se à valorização que uma pessoa dá a si mesma, a crença que esta tem acerca do próprio valor, a maneira como a pessoa se gosta. Já a autoimagem é a forma como a pessoa se percebe e esta percepção está em sintonia direta com os aspectos socioafetivos vivenciados pelo indivíduo ao longo da sua vida. Tanto a autoestima quanto a autoimagem são construídas na relação, tanto interpessoal quanto intrapessoal, estabelecida com as pessoas que interagem com o indivíduo, ou seja, a família, a escola, os grupos de pares e a sociedade.

Mruk (1998 apud BERNARDI; DIETER STOBÄUS, 2011, p. 54) infere que:

Algumas características negativas para a aprendizagem seriam provocadas pela autoestima deteriorada, salientando que alunos com baixa autoestima são muito vulneráveis às críticas e aos julgamentos negativos dos seus colegas e professores. Outra característica da baixa autoestima é o afeto negativo que o aluno experimenta, em especial um sentimento de inferioridade, uma falta

de merecimento e insegurança, caracterizando-os como ansiosos, depressivos e ineficazes.

Sendo assim, um aluno que possui um Transtorno Específicos da Aprendizagem Matemática, como a discalculia, requer, primeiramente que o transtorno seja identificado o quanto antes, uma vez que quanto mais precoce for detectado, mais fácil se torna o processo de intervenção. Portanto, é importante que o professor, ao iniciar o trabalho com alunos discalcúlicos, proporcione intervenções pedagógicas que visem o resgate da autoestima e da autoimagem desses alunos (BERNARDI; DIETER STOBÄUS, 2011). Coll, Marchesi e Palacios (2004a apud BERNARDI; DIETER STOBÄUS, 2011) enfatizam que o docente deve procurar conhecer não só as dificuldades desses alunos, mas também suas potencialidades.

4 Recursos materiais e didáticos para ensinar Matemática para o discalcúlico

Pesquisas têm apontado que os recursos materiais e didáticos, assim como as tecnologias assistivas são importantes, uma vez que proporcionam um diferencial para ajudar o discalcúlico no que se refere ao seu processo ensino-aprendizagem. Sendo assim, nos últimos anos, o tema tem sido alvo de interesse dentre os pesquisadores (STARCIC; ISTENIC, 2010 apud SILVA, 2021). Mesmo com o crescente interesse e o desenvolvimento de alguns estudos, poucas informações circulam entre os profissionais da educação, o que interfere diretamente na divulgação e aplicação desses recursos, tornando-os mais ou menos efetivos no processo ensino-aprendizagem de alunos com discalculia (RUFUS et al., 2015 apud SILVA, 2021).

Silva (2021) ainda ressalta que as crianças com discalculia não têm um senso numérico, uma vez que têm problemas em

relacionar símbolos numéricos a objetos e situações do mundo real. Existem softwares que podem ser utilizados em sala de aula e em casa, os quais incorporam o aprendizado dos conteúdos matemáticos em vídeos interativos e utilizam histórias, músicas e dicas visuais para ajudar os alunos a relacionar os conceitos de Matemática com situações cotidianas das crianças com discalculia. O autor também elenca algumas tecnologias assistivas que podem ser utilizadas para auxiliar um discalculico:

- a. Planilhas de matemática eletrônica: entregues e mostradas em um computador para a criança com o intuito de substituir as planilhas de papel, ajudam também aqueles que possuem dificuldade visual, já que a mesma possui ajustes no tamanho da fonte. Além de possuir um feedback quase imediato, ajudando inclusive em tarefas de casa;
- b. Corrida de números de software de Matemática: os discalculicos, as vezes, podem possuir problemas na visualização espacial com números, Por isso, a utilização de algum software de terceira dimensão pode ser uma boa opção, pois os mesmos contam com um algoritmo que permite os alunos verem símbolos e espaços físicos;
- c. Livros: criar o hábito de leitura para pessoas com dificuldades de aprendizagem é uma excelente estratégia, uma vez que os livros são ferramentas de fácil acesso;
- d. Além de jogos como, por exemplo, Jogo Math Game, Jogo Aprendendo Tabuada; e aplicativos como Jogo de Matemática e Truques de Matemática, Jogos Mentais, etc.

5 Estratégias metodológicas para lidar com o discalculico em sala de aula

Martins (2015) ainda enfatiza que os professores da educação básica essencialmente do Ensino Fundamental se atentem para as dificuldades relacionadas com a matemática, como a dificuldade de compreensão dos símbolos, dificuldade de compreensão e realização das atividades solicitadas, dentre tantas outras que um discalculico possui, para que assim possa ser identificado caso o aluno possua o distúrbio e assim evitar que danos maiores.

O site Educamais.com mostra algumas estratégias que podem ser adotadas para facilitar o ensino aprendizagem do discalculico, mas sem deixá-lo a margem da turma e do ambiente que o mesmo vive.

Algumas estratégias propostas pelo site Educamais.com estão elencadas abaixo:

1. Permitir o uso de calculadora;
2. Permitir a utilização da tabuada escrita;
3. Usar caderno quadriculado;
4. Utilizar mecanismos visuais para resolver problemas;
5. Adaptar a aprendizagem à forma como a criança aprende;
6. Nas atividades avaliativas: elaborar perguntas claras e diretas; não estipular limite de tempo; certificar que o aluno compreendeu o que é solicitado;
7. Permitir que o aluno faça provas orais em complemento às escritas;
8. Não sobrecarregar o aluno com trabalhos de casa

6 Considerações finais

Por meio do breve referencial teórico aqui apresentado, pode-se perceber que os Transtornos Específicos de Aprendizagem e, mais especificamente, a discalculia tem sido um tema alvo de pesquisas, uma vez que ensinar Matemática para um aluno que possui dificuldades de realizar operações matemáticas é um desafio que tem sido enfrentado por professores.

Os autores aqui referenciados apontam a importância do preparo dos professores e dos futuros professores, assim como dos demais profissionais da educação na identificação precoce desse distúrbio para proporcionar a esses alunos um atendimento especializado, adequado e de qualidade, amenizando, assim as consequências que este distúrbio pode acarretar no processo ensino-aprendizagem. Vale salientar ainda que, contudo, os profissionais da educação não devem apenas entender as dificuldades de aprendizagem desses alunos; estes devem também conhecer os recursos materiais e didáticos, assim como as estratégias metodológicas para melhor ensinar os discalcúlicos.

Deve-se compreender como os alunos constroem seus conhecimentos e como elaboram suas aprendizagens. Para tanto, é preciso conhecer melhor cada aluno em sua individualidade e a partir do conhecimento desse aluno como um ser biopsicossociocultural e do entendimento das suas dificuldades de aprendizagem, será possível realizar um trabalho adequado e significativo que o leve a desenvolver todo o seu potencial.

Referências

ALVES, Marcos de Oliveira; LEITE Maria José. *Discalculia*: distúrbio de aprendizagem da matemática. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática). Centro Universitário Municipal de Franca, Franca, 2011

AMERICAN PSYCHIATRIC ASSOCIATION et al. *DSM-5*: Manual

diagnóstico e estatístico de transtornos mentais. Artmed Editora, 2014.

BERNARDI, Jussara. *Alunos com discalculia: o resgate da auto-estima e da auto-imagem através do lúdico*. 2006. Dissertação (Educação). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006. Disponível em: <https://tede2.pucrs.br/tede2/bitstream/tede/3691/1/386384.pdf>. Acesso em: 10 out. 2022.

BERNARDI, Jussara; DIETER STOBÄUS, Claus. Discalculia: conhecer para incluir. *Rev. Educ. Espec.*, Santa Maria, v. 24, n. 39, p. 47-60, jan./abr. 2011. Disponível em: <http://www.ufsm.br/revistaeducacaoespecial>. Acesso em: 15 out. 2022.

CAMPOS, Ana Maria Antunes de. *Discalculia: superando as dificuldades em aprender Matemática*. Rio de Janeiro: Wak Editora, 2015.

DOMINGOS, Glauca Santana. *Diferenças entre dificuldade e transtorno de aprendizagem no processo de escolarização: análise bibliográfica*. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Pedagogia). Universidade Federal de Uberlândia, Ituiutaba, 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/28829/3/Diferen%c3%a7asDificuldadeTranstorno.pdf>. Acesso em: 10 out. 2022.

GIMENEZ, Eloisa Hilsdorf Rocha. Dificuldade de aprendizagem ou distúrbio de aprendizagem? *Revista de Educação*, v. 8, n. 8, p. 78-83, 2005. Disponível em: <https://seer.pgsskroton.com/educ/article/view/2214>. Acesso em: 25 out. 2022.

GONZÁLEZ, Alexandra Graciela Árizaga; FREIRE, John Francisco Román. La discalculia en alumnos de la educación básica. *Revista Sociedad & Tecnología*, v. 4, n. 3, p. 432-446, 2021. Disponível em: <https://institutojubones.edu.ec/ojs/index.php/societec/article/view/147/434>. Acesso em 21 out. 2022.

MARTINS, Daiane Mendes Carvalho. *Avaliação do conhecimento e da percepção de professores do Ensino Fundamental e Ensino Médio sobre discalculia*. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática). Centro Universitário Municipal de Franca, Franca, 2015.

NASCIMENTO, Joséfa Andreza de Alencar. Discalculia: um estudo realizado com alunos atendidos pelo núcleo de inclusão e educação especial do município de Mauriti – CE. *Congresso Internacional de Educação e Inclusão: Práticas pedagógicas, direitos humanos e interculturalidade*. 2014. Disponível em: <https://docplayer.com.br/20670793-Discalculia-um-estudo-realizado-com-alunos-atendidos-pelo-nucleo-de-inclusao-e-educacao-especial>

do-municipio-de-mauriti-ce.html. Acesso em: 17 out. 2022.
PASSOS, Adriana Quimentão et al. Dificuldade de aprendizagem em Matemática: discalculia. *UNOPAR Cient., Ciênc. Human. Educ.*, Londrina, v. 12, n. 1, p. 61-71, jun. 2011. Disponível em: <https://revista.pgsskroton.com/index.php/ensino/article/view/2889>. Acesso em: 17 out. 2022.

ROZEK, Marlene; SERRA, Rodrigo Jacobo. Dificuldades de aprendizagem e problemas emocionais: reflexões sobre a necessidade de uma proposta de formação docente. *Educação por Escrito*, Porto Alegre, v. 6, n. 1, p. 167-184, jan.-jun. 2015. Disponível em: <https://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/poescrito/article/view/19475/12803>. Acesso em 11 de out. 222.

SANTOS, Euzila Pereira dos. Dificuldades de aprendizagem nas séries iniciais do Ensino Fundamental. 2015. Monografia (Pedagogia). Universidade de Brasília – UNB, Goiás, 2015. Disponível em: https://bdm.unb.br/bitstream/10483/12111/1/2015_EuzilaPereiradosSantos.pdf. Acesso em 10 nov. 2022.

SILVA, William Cardoso da. *Discalculia: uma abordagem à luz da Educação Matemática*. 2008. Projeto de Iniciação Científica. Universidade de Guarulhos, Guarulhos, 2008. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Silva.pdf. Acesso em: 10 nov. 2022.

SILVA, Daceana Sedano da. *Tecnologia assistiva para aluno com discalculia: um estudo de caso*. 1. ed. Vitória: Diálogo Comunicação e Marketing, 2021. Disponível em: <https://dialogocom.com.br/wp-content/uploads/2021/07/Ebook-Discalculia.pdf>. Acesso em: 20 out. 2022.

TULESKI, Silvana Calvo; EIDT, Nadia Mara. Repensando os distúrbios de aprendizagem a partir da psicologia histórico-cultural. *Psicologia em Estudo*, Maringá, v. 12, n. 3, p. 531-540, set./dez. 2007. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/pe/a/DvMJPRVJ5TpjLcnzhMcBwvt/?lang=pt&format=pdf>. Acesso em: 02 nov. 2022.

FORMAÇÃO PRESENCIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA REGIÃO DE FRANCA-SP

Ana Laura Rodrigues Silva
Licencianda em Matemática – Uni-FACEF
anarodriguesmat@gmail.com

Silvia Regina Viel
Doutora em Educação Matemática – Uni-FACEF
silviarviel@gmail.com

Resumo: O presente artigo tem como objetivo discutir a formação do professor de Matemática na região de Franca, tendo em vista que, num curto período, houve uma significativa diminuição na oferta desse curso na modalidade presencial. A discussão apresentada foi desenvolvida através de uma abordagem qualitativa, sendo analisadas informações coletadas por meio de questionário enviado às universidades que ainda oferecem o curso. Os resultados obtidos nos permitem afirmar que há a formação de poucos profissionais na área em um momento em que houve um crescimento na procura por estes em todo o mundo e, em especial no Brasil, para fazerem frente às demandas educacionais do ensino básico e no Novo Ensino Médio, bem como nas áreas de tecnologia e financeira, que exigem profissionais capacitados para analisar e desenvolver modelos cada vez mais complexos, devido ao aumento de dados e as múltiplas possibilidades de investimentos.

Palavras-chave: Licenciatura. Matemática. Formação de professores. Ensino presencial.

1 Introdução

Este trabalho visa refletir sobre a atual diminuição na formação presencial de profissionais para atuação como professores de Matemática, área da tecnologia, dentre outras. Procura apontar as principais implicações da falta de professores deste cenário e refletir sobre possibilidades para amenizar tal situação.

Conhecer a forma como o ensino superior em Licenciatura de Matemática está distribuído na região de Franca-SP permite-nos identificar a necessidade de se pensar/repensar na formação

de profissionais dispostos a enfrentar desafios cada vez mais intensos no âmbito educacional. O presente artigo, traz um breve levantamento do início da educação no Brasil, com destaque para o ensino de Matemática e os obstáculos encontrados pelos docentes durante sua vida profissional.

Além de ser uma via para a construção de conhecimento e informações, a pesquisa é base para o progresso humano no mundo científico, tecnológico e cultural. Por meio dela, o aluno tem a possibilidade de descobrir um mundo diferente, com informações novas e sanar suas curiosidades. Entretanto, algo comum entre os discentes hoje, em sua maioria, é o fato de não procurarem respostas para seus questionamentos, muitas vezes, portanto, desistem de buscarem novos conhecimentos.

Diante dessa procura pelo novo, pretendemos entender a formação de professores na área da Matemática na região de Franca e todas as consequências da carência desses profissionais para a sociedade local.

Para embasar teoricamente este trabalho de pesquisa, foi utilizado como referência a análise do artigo “Licenciatura em matemática oferecidas na modalidade presencial na região de franca-sp: um breve levantamento” (BONETI, 2019, p. 25), acompanhado outras pesquisas e trabalhos acadêmicos.

Desta forma, o presente trabalho foi assim organizado: no segundo capítulo, houve uma breve abordagem do desenvolvimento do ensino desde a chegada dos portugueses até os dias atuais, com foco também nas licenciaturas; o capítulo três trouxe a defasagem do ensino atual bem como as mudanças que estão sendo atribuídas ao Novo Ensino Médio; por fim, no capítulo quatro, foram apresentados dados da região de Franca sobre formandos em licenciatura em matemática dos anos de 2019 a 2022.

2 Um percurso cronológico na história das licenciaturas

Antes de falar sobre a formação de professores no país nos dias atuais com foco na formação presencial na região de Franca-SP, é necessário conhecer a forma como a educação foi introduzida no país desde o descobrimento, em 1500. De acordo com Almeida (2014), o movimento foi introduzido no Brasil através dos religiosos missionários e da própria política colonizadora imposta pelos portugueses. Quando a Companhia de Jesus desembarcou por aqui, em meados de 1549, tinha a missão de converter os nativos à fé católica.

Neste sentido, o estudioso afirma que eles trouxeram na bagagem métodos pedagógicos, tornando a alfabetização o caminho mais seguro para a catequese. Inicialmente, sob o comando do padre Manoel da Nóbrega, a Companhia fundou colégios e escolas de instrução elementar, onde se aplicavam dois modelos de instrução: um para os indígenas centrado na leitura e escrita; e outro voltado para os filhos dos colonos, consistindo no ensino mais culto. O ensinamento proposto pelos jesuítas era alheio ao interesse da coroa portuguesa que, naquele momento, queria colocar as escolas a serviço do Estado e não mais da fé. Dessa forma, assim como as demais disciplinas, o advento do ensino da Matemática no Brasil se deu com os jesuítas. Em algumas escolas elementares foram ensinadas as quatro operações aritméticas além da Geometria Euclidiana, considerada um estudo mais avançado.

Quando foram expulsos do Brasil em 1759, havia aqui dezessete colégios e escolas de primeiras letras. Porém, vale destacar que, sem os jesuítas, a educação brasileira praticamente voltava à estaca zero. Já em 28 de outubro de 1772 em Portugal, após a assinatura de uma carta dando plenos poderes ao primeiro-ministro para executar a reforma da Universidade de Coimbra, os Estatutos Novíssimos foram aprovados, com respeito à Faculdade de Matemática, fundada em 1772. Nesse mesmo ano, Dr. José

Monteiro da Rocha fez a abertura da faculdade, com sua primeira aula inaugural. (SILVA, 2003).

Segundo Nóvoa em “Formação de Professores e Profissão Docente”

Os reformadores portugueses do final do século XVIII sabiam que a criação de uma rede escolar, geometricamente repartida pelo espaço nacional, era uma aposta de progresso. Mas sabiam, também, que este esforço iria contribuir para legitimar ideologicamente o poder estatal numa área-chave do processo de reprodução social. Os professores são a voz dos novos dispositivos de escolarização e, por isso, o Estado não hesitou em criar as condições para a sua profissionalização. (NÓVOA, 1992, p. 2)

Com a vinda da família real portuguesa em 1807, vieram também os investimentos no ensino técnico, e no ano seguinte iniciava-se no país o ensino superior exclusivamente para homens. Já a educação popular com estudos primários e médios ficara esquecida. Foi criada também a Academia Real Militar, que oferecia disciplinas como (Telles, 2003, p. 8):

1º Ano, Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria, Desenho;
2º Ano, Álgebra, Geometria, Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Descritiva, Desenho; entre outras diversas disciplinas.

A educação oficial no Brasil tem início em 15 de outubro de 1827, a partir de um decreto imperial de D. Pedro I, porém a data só foi oficializada em 1963. Ainda segundo Nóvoa:

Ao longo do século XIX consolida-se uma imagem do professor, que cruza as referências ao magistério docente, ao apostolado e ao sacerdócio, com a humildade e a obediência devidas aos funcionários públicos, tudo isto envolto numa auréola, algo mística de valorização

das qualidades de relação e de compreensão da pessoa humana. (NÓVOA, 1992, p. 2)

A ambição republicana de “formar um homem novo” concedeu aos professores um papel simbólico no contexto de qualificação e autonomia. Mais do que um lugar de aquisição de técnicas e de conhecimento, a formação de professores é excepcional para a socialização e configuração profissional. A partir desta percepção o Estado Novo passou a tomar medidas radicais dentro da área.

Por um lado, o Estado exerce um controlo autoritário dos professores, inviabilizando qualquer veleidade de autonomia profissional: a degradação do estatuto e do nível científico inserem-se nesta estratégia de imposição de um perfil baixo da profissão docente. Por outro lado, o investimento missionário (e ideológico) obriga o Estado a criar as condições de dignidade social que salvaguardem a imagem e o prestígio dos professores, nomeadamente junto das populações. (NÓVOA, 1992, p. 5)

Após diversas tentativas falhas do Estado Novo a fim de substituir a legitimidade republicana no terreno educativo, deu-se por encerrado a reformulação no domínio da formação de professores.

Após várias tentativas falhadas de reformar as escolas normais republicanas, o Estado Novo decidiu pura e simplesmente encerrá-las: primeiro, em 1930, as Escolas Normais Superiores, que não voltariam a abrir; depois, em 1936, as Escolas Normais Primárias, que reabririam na década de 40 completamente modificadas. Até aos anos 60 o Estado Novo manteve uma atitude de suspeição em relação à formação de professores, sofisticando os mecanismos de controlo ideológico no acesso e no exercício da actividade docente. (NÓVOA, 1992, p. 5)

Analisando o ensino superior em Matemática, a partir da década de 1990 a licenciatura foi ganhando destaque com o desenvolvimento de trabalhos, inclusive dissertações e teses.

O processo de formação do professor deveria se desenvolver de maneira mais integrada, em que o conhecimento disciplinar não constituísse mais o fundamento único ao qual se devessem agregar métodos apropriados de “transmissão”. De modo geral, os saberes docentes são compostos em diferentes componentes, de tal forma que um deles (o chamado conhecimento da disciplina), assume a condição de essencial. Para Nóvoa: “O professorado constituiu-se em profissão graças à intervenção e ao enquadramento do Estado, que substituiu a Igreja como entidade de tutela do ensino”. (NÓVOA, 1992, p. 2)

Não é de hoje que sua institucionalização e currículo são discutidos. Afinal, qual o perfil dos estudantes das licenciaturas? Por muitos considerados “loucos, malucos”, será mesmo isso que define um futuro docente? É importante considerar as características dos licenciandos, uma vez que elas têm peso sobre a aprendizagem e seus desdobramentos na atuação profissional.

De acordo com uma pesquisa realizada pelo ENADE/ INEP/MEC, 2005, os licenciandos possuem características como:

- a) Os estudantes são majoritariamente do sexo feminino;
- b) Trata-se de estudantes mais velhos;
- c) Apenas 26% declaram não trabalhar e ter gastos financiados pelos pais;
- d) 53% declaram ter optado pelo curso porque querem ser professores;

Entre 2001 e 2006, houve uma expansão de 65% nos cursos presenciais de licenciatura. Autores como Barros (2015) e Neves (2016) mostram também que, no período de 1996-2010, as licenciaturas estiveram entre os cursos de maior expansão no país, a oferta EAD (Educação a Distância) facilitou o passo aos cursos

de graduação.

De acordo com Oliveira e Delgado (2020), dados do INEP mostram que em 2010 as IES públicas e privadas no Brasil somavam um total de 2.378 instituições, enquanto em 2018 eram 2.537, o que representa um aumento de 6,7% no período. A proporção entre IES públicas e privadas permaneceu a mesma, com as instituições privadas representando 88% do total. No que se refere à oferta de licenciaturas, a tabela 1 indica uma diminuição de cerca de 6% no período, com redução tanto por parte do setor público quanto privado (2% e 9%, respectivamente).

Considerando a análise de expansão entre 2010 e 2018:

Quanto à evolução de matrículas no período 2010-2018, [...], mostra ter havido grande expansão da modalidade EAD: 121% no total dos cursos; enquanto isso, presencial cresceu 16%. Como resultado, em 2018 o setor a distância passou a responder por 24% do total de matrículas do país, e as presenciais por apenas 76%.

Os dados analisados mostram que a expansão do ES (Ensino Superior) brasileiro é um fenômeno, tal como no período anterior de 2001 e 2006. Seu diferencial, porém, está vinculado ao avanço cada vez maior da modalidade EAD que, por suas características, além de romper barreiras físicas e geográficas, possibilitam o acesso de pessoas de rendas mais baixas devido ao custo menor das suas mensalidades.

De acordo com Gatti (2009), no geral, são feitos questionamentos sobre a qualidade desses cursos e, ainda que existam preocupações com a melhor qualificação da formação de professores e com suas condições de exercício profissional, verifica-se que o cenário atual desses ainda estão bem distantes de serem satisfatórios.

Para se adaptar às demandas da sociedade atual, a qual se encontra altamente automatizada e necessita de muito mais que

somente treinar pessoas no uso das novas tecnologias, trata-se de formar os indivíduos para aprender de forma a prepará-los para a contínua e acelerada transformação do conhecimento tecnológico. Neste sentido, essas mudanças afetam diretamente a formação do professor, pois para que um profissional da educação se mantenha atualizado e exercendo com êxito seu ofício é de extrema importância que em suas formações estejam presentes disciplinas as quais abrangem a totalidade educacional tecnológica. Desta forma, o perfil docente contemporâneo adquire novas especificidades, com profissionais voltados não somente para as áreas próprias de sua formação, mas também para áreas como a tecnologia e demais disciplinas exigidas no Novo Ensino Médio.

De acordo com o dicionário Online de Português Aurélio: Licenciatura é “Grau universitário que possibilita o exercício do magistério formando professores para o ensino fundamental e médio”. Pela legislação, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, através da LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996, têm por objetivo formar professores para a educação básica: Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Ensino Profissionalizante, Educação de Jovens e Adultos e Educação Especial.

Diante de diversas mudanças, uma delas ganha destaque, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), que, a partir de 1996 passa a recomendar que a formação de professores seja feita em nível superior, ou seja, todos os professores de Educação Básica tenham cursado Licenciaturas. Com isso, o magistério foi perdendo naturalmente suas forças, e em seu lugar, surgiu a formação Normal Superior, que entra em vigor através da seguinte cláusula legislativa:

Art. 62. A formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura plena, admitida, como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nos cinco primeiros

anos do ensino fundamental, a oferecida em nível médio, na modalidade normal. (LDB. 9394/1996, p.44)

De acordo com o PNE (Plano Nacional de Educação), o prazo para atingir esse objetivo foi até 2020. Pois o curso médio de magistério passou a não ser aceito como qualificação nos concursos públicos que abrem vagas para professores.

Assim, vimos “brevemente” o desenvolvimento da educação e formação dos docentes até os dias atuais, no próximo capítulo será apresentado a defasagem do ensino e novas propostas que estão sendo apresentadas para o Ensino Médio.

3 A defasagem na educação e possíveis reformulações educacionais.

Diversos fatores influenciam na defasagem atual da formação de professores, como o processo a falta de reconhecimento, acompanhado pela baixa remuneração. Outro fator que está evidenciado na atualidade é o corte de bolsas e a falta de incentivo do governo para os graduandos de licenciatura.

Neste sentido, de acordo com uma pesquisa realizada pelo site Uol, desde 2019, diversos cortes foram realizados e anunciados, e em pleno 2022, ano de Copa do Mundo, enquanto o Brasil inteiro estava com os olhos voltados para o jogo da seleção nacional contra a Suíça, o Governo Federal fazia um novo corte de R\$ 1,68 bilhão no orçamento do MEC (Ministério da Educação), sendo, desse valor, R\$ 220 milhões advindos das universidades públicas e institutos federais de educação.

Neste sentido, tendo em vista o cenário exposto no decorrer desta pesquisa, é evidente que fatores como bolsas de estudos são instrumentos importantes para a formação de novos profissionais da área em questão, principalmente aos alunos de baixa renda, tendo assim, acesso facilitado a uma graduação superior de qualidade.

Assim, surgiram propostas de reformulações na educação, buscando modificações para auxiliar no seu enriquecimento.

Uma delas aconteceu no Ensino Médio brasileiro, visto que é a etapa de ensino com pior desempenho, marcada pela alta taxa de evasão e por baixos índices de rendimentos na aprendizagem, constatados em avaliações internacionais como o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), no qual o Brasil ocupa, lamentavelmente, as últimas colocações.

Muitas foram as justificativas para reformular a última etapa da educação básica, como: um ensino de baixa qualidade, número excessivo de disciplinas, alto nível de reprovação. Além disso, de acordo com o Anuário Brasileiro de Educação de 2020, a análise dos indicadores informa que de 90% dos estudantes de 15 a 17 anos que frequentam a escola, apenas 71,1% estão na etapa escolar recomenda em 2019. Desta forma, evidencia-se a baixa porcentagem de estudantes que conseguem concluir essa etapa de ensino até os 19 anos, atualmente em torno de 65%.

Com isso, o modelo único carregado por disciplinas obrigatórias foi substituído por uma estrutura mais flexível, trazendo como base o aprofundamento curricular de áreas do conhecimento e cursos de qualificação profissional com o Novotec.

O novo currículo do Ensino Médio, é organizado por áreas de conhecimento e não por matérias, além da escolha de itinerários formativos por parte dos alunos, e o aumento da carga horária dos estudantes nas unidades de Ensino, que passou de 2400 horas para 3 mil horas, das quais 1800 horas serão destinadas para disciplinas obrigatórias da base Nacional Comum Curricular e 1200 para os itinerários formativos, dentre essas estão as disciplinas de Matemáticas e suas Tecnologias; Linguagens e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Uma das principais vantagens oferecidas pelo novo currículo é a flexibilidade nas disciplinas, a organização no

desenvolvimento do projeto de vida e carreira dos estudantes, pois as atividades teriam que priorizar a cooperação, resolução de problemas, desenvolvimento de ideias, o pensamento crítico e o respeito.

Entretanto, é importante que saibamos a posição que os profissionais da educação estão adquirindo diante dessas mudanças, dado que, com a aprovação da reforma, os professores não serão mais os únicos habilitados a conduzir uma sala de aula.

Contudo, assim como toda mudança, a reforma do ensino médio também veio acompanhada de alguns gargalos, como por exemplo a formação de profissionais, que, assim como explicado anteriormente, continua pautada em especialidades. Nesse sentido, o professor tem a qualidade de seu futuro desempenho prejudicada, visto que, seguindo a proposta do novo modelo de ensino, há a exigência de que os professores especialistas apenas tenham uma formação, independente das disciplinas que irão lecionar, de acordo com os itinerários formativos adotados em cada UE. Esse modelo visa ser mais atrativo às necessidades de uma sociedade moderna, um mercado de trabalho cada vez mais exigente e sustentável, encurtando as distâncias entre o que se ensina em sala de aula e vivência do aluno. Desta forma, a educação se apresenta como um modelo mais profissionalizante do que formativo, o que podemos considerar como fruto de uma sociedade extremamente capitalista e automatizada.

A seguir serão apresentados dados referentes a formação de professores de matemática na região de Franca, evidenciando a falta de profissionais na área para os próximos anos.

4 Retrospectiva e novos dados

Após realizar uma análise minuciosa do artigo “Licenciatura em matemática oferecidas na modalidade presencial na região de franca-sp: um breve levantamento” de Rafaela Dalalian Souza

Boneti, 2018, que nos apresentou todas as instituições que ofereciam a licenciatura em Matemática presencial num raio de 200 Km da cidade de Franca – SP, num intervalo de tempo de 2008 e 2018, foi possível atualizar essas informações, através de pesquisas e contatos feitos com as universidades.

Quatro anos se passaram, e através de pesquisas via internet, percebe-se que, num curto espaço de tempo, das nove Universidades, Centros universitários ou Faculdades que ofereciam o curso citado pela autora, apenas quatro permanecem ativas dentro do perímetro estabelecido, sendo elas:

- Centro Universitário Municipal de Franca (Franca-SP)
- Universidade do Estado de Minas Gerais (Passo-MG)
- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (Araraquara-SP)
- UFTM- Universidade Federal do Triângulo Mineiro (Uberaba-MG)

Cidades onde se encontram as universidades.

Figura 1: Cidades que oferecem o curso de licenciatura em matemática



Fonte: autora, 2022.

Para evidenciar tal estudo, foi elaborado um questionário via Google Forms (serviço gratuito para criar formulários online), que continha 17 questões elaboradas com a intenção de coletar dados sobre as instituições de ensino, onde foram destacadas algumas informações, visando a padronização e uniformidade dos elementos fornecidos. O formulário foi encaminhado, via e-mail no dia 31 de março de 2022, aos coordenadores do curso de licenciatura de Matemática de quatro Instituições de Ensino Superior (IES), porém, só obtivemos respostas de três dessas instituições. A pesquisa nos evidenciou as seguintes informações:

- Anos em que houve a concessão do curso de licenciatura de matemática nos anos de 2019 a 2022.
- Quantidade de estudantes que iniciaram o curso de 2019 a 2022.

Os resultados podem ser observados nas figuras 2 e 3. E o gráfico da figura 4, evidencia a diminuição ao longo dos anos da quantidade de alunos inscritos no primeiro ano do curso de licenciatura em matemática, cujo o ano de 2022, apenas a Universidade Estadual houve concessão do curso.

Figura 2: Instituições de Ensino que concederam turma nos anos de 2019 a 2022

Universidades	Cidades	Em 2019 houve turma de primeiro ano?	Em 2020 houve turma de primeiro ano?	Em 2021 houve turma de primeiro ano?	Em 2022 houve turma de primeiro ano?
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo	Araraquara	SIM	SIM	SIM	SIM
Centro Universitário Municipal de Franca	Franca	SIM	SIM	SIM	NÃO
Universidade do Estado de Minas Gerais	Passo	SIM	SIM	SIM	SIM
UFTM- Universidade Federal do Triângulo Mineiro	Uberaba				

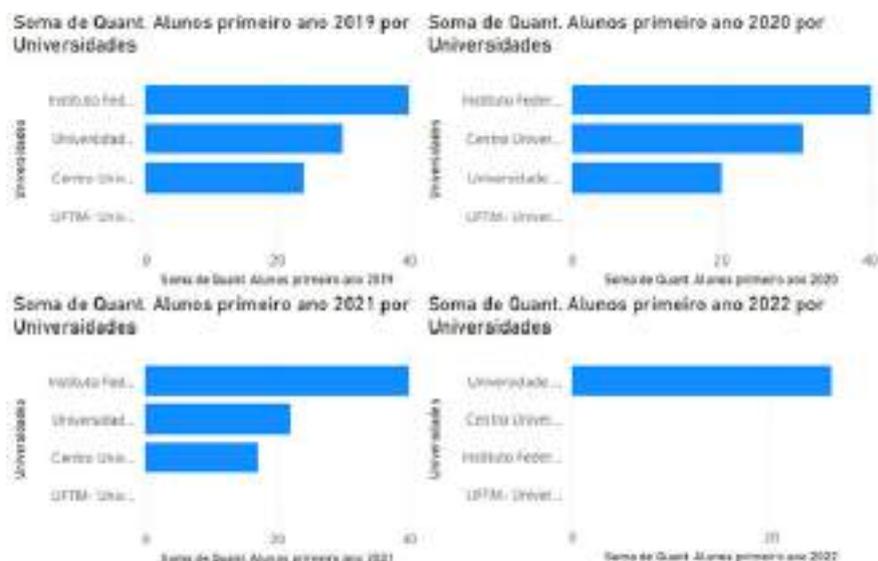
Fonte: autora, 2022.

Figura 3: Quantidade de alunos de primeiro ano em 2019, 2020, 2021 e 2022

Universidades	Cidades	Soma de Quant. Alunos primeiro ano 2019	Soma de Quant. Alunos primeiro ano 2020	Soma de Quant. Alunos primeiro ano 2021	Soma de Quant. Alunos primeiro ano 2022
Universidade do Estado de Minas Gerais	Passo	30	29	22	26
Centro Universitário Municipal de Franca	Franca	24	31	17	0
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo	Arataquara	40	40	40	0

Fonte: autora, 2022.

Figura 4: Quantidade de alunos de primeiro ano em 2019, 2020, 2021 e 2022.

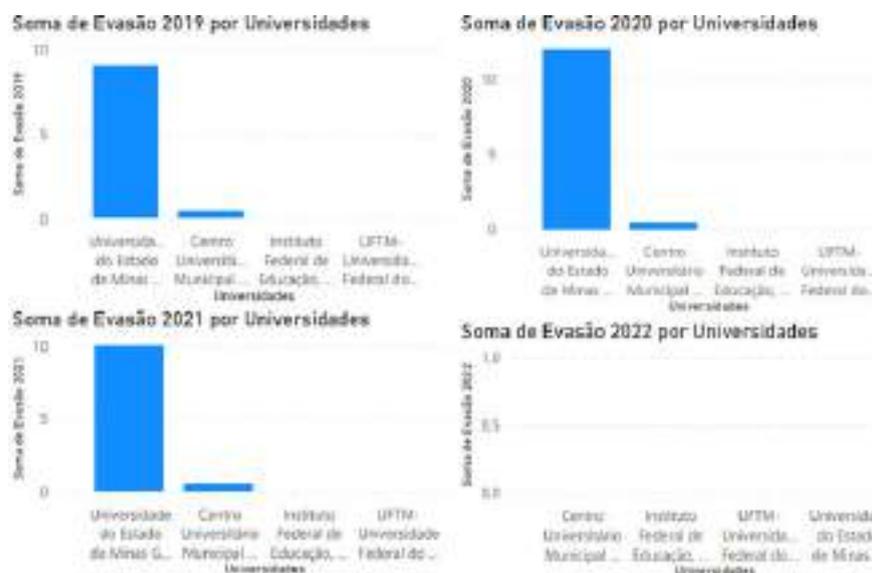


Fonte: autora, 2022.

Vale ressaltar que as pesquisas foram realizadas em um momento que estava ocorrendo uma pandemia. Em virtude da pandemia do COVID-19, as escolas e universidades passaram a lidar diariamente com rápidas mudanças para enfrentar o distanciamento social e essa nova fase da educação. Assim, a alternativa para continuar garantindo a educação a todos era o

ensino remoto. As aulas das diferentes disciplinas passariam a ser ministradas simultaneamente em um modelo totalmente online. Desta forma, devemos ter em mente que os resultados foram afetados drasticamente devido ao movimento de reclusão social, no qual o ensino passou a ser simultâneo e não mais presencial, o que acarretou em diversas desistências do processo de graduação, conforme pode ser visto nos gráficos da figura 5.

Figura 5: Taxa de evasão nas turmas em andamento em 2019, 2020, 2021 e 2022



Fonte: autora, 2022.

Observou-se que nas universidades que responderam o questionário, o que chamou atenção foi a elevada taxa de evasão nas turmas em andamento, dando a entender que o número de docentes formados em cursos presenciais em matemática dentro da área em estudo tende a diminuir nos próximos anos.

Embora a sociedade demande cada vez mais o uso da Matemática no dia a dia, o Brasil passa por um escasseamento dos profissionais da área, em que é evidente que temos um

crescimento da necessidade diante das demandas educacionais, assim como na área da tecnologia, onde a velocidade com que a demanda avança por conta das novas transformações e explosão de contratação requer profissionais capacitados para analisar e desenvolver modelos cada vez mais complexos, na economia, pesquisas, saúde entre outras áreas.

Assim, antes de pensar em formar profissionais no modo quantitativo as universidades devem focar em formar profissionais no modo qualitativo, pois a má formação limita a qualidade de oferta dos graduados, evidenciando uma geração de pessoas com dificuldades no mercado de trabalho.

Esta é uma situação que perdurará por muitos anos, pois não há um aumento de profissionais disponíveis no mercado, a economia do país cresceu, mas a educação não acompanhou esse desenvolvimento, de forma geral, o problema já está evidente e mudanças no cenário devem demorar a surtir efeito, a curto prazo, muitas empresas já investem na retenção de profissionais por alternativas como melhores salários e investimentos na qualificação e valorização dos profissionais, já a longo prazo, é de se esperar mudanças no ensino, visando uma mão de obra qualificada.

5 Considerações finais

Após a realização de estudo e análise de artigos científicos, utilizados como referência para compor o corpus dessa pesquisa, foi possível identificar que houve uma diminuição considerável no número de universidades, tanto públicas, quanto federais, que oferecem o curso de Licenciatura presencial em Matemática na região de Franca-SP.

Diante disso, pode-se prever que futuramente haverá uma carência de professores de matemática nas escolas brasileiras. Essa insuficiência poderá ser vista tanto na formação dos professores, como de profissionais com formação matemática

para atuar em outros segmentos. Já o ensino básico, carece de materiais didáticos que podem incentivar o aluno a se interessar pela disciplina, fazendo com que ele desenvolva, sanando as dificuldades e eliminando receio pelo contato com a matemática.

Vale salientar também a forma como a grade dos cursos são estruturadas, a fim de formar profissionais alinhados aos novos desafios encontrados na área da educação. Dentre elas, formar um profissional preparado para atuar nos moldes do Novo Ensino Médio, e a ensinar uma matemática mais voltada para a vivência do aluno, que seja compatível com o seu cotidiano, capacitando-o para ser cada vez mais o protagonista de seu futuro – que deve ser o objetivo principal dessa área.

Referências

ALVES. C. Governo faz corte de R\$ 1,7 bi na verba do MEC em meio a jogo da seleção. Uol Notícias. Disponível em: <https://noticias.uol.com.br/colunas/chico-alves/2022/11/28/governo-faz-corte-de-r-17-bi-na-verba-do-mec-em-meio-a-jogo-da-selecao.htm>. Acesso em: 02 de dezembro de 2022.

BONETI, Rafaela Dalalian Souza. LICENCIATURA EM MATEMÁTICA OFERECIDAS NA MODALIDADE PRESENCIAL NA REGIÃO DE FRANCA-SP: um breve levantamento. Revista Matemática e Educação, v.1, n.9, jan.2019.

BRASIL. LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 06 jul. 2022.

BRASÍLIA: UNESCO, 2009. 294 p. Disponível em: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000184682/PDF/184682por.pdf.multi>
BRASIL. Plano Nacional de Educação (PNE). Lei Federal n.º 10.172, de 9/01/2001. Brasília: MEC, 2001c.

GATTI, B. A. Formação de Professores no Brasil: características e problemas. p.1359. Disponível em: <https://www.redalyc.org/html/873/87315816016/>. Acesso em 07 de junho de 2022.

GATTI, B. A. FORMAÇÃO DE PROFESSORES: CONDIÇÕES E PROBLEMAS ATUAIS. Revista Internacional de Formação de Professores (RIFP), Itapetininga, v. 1, n.2, p. 161-171, 2016.

GATTI, B. A. Professores do Brasil: impasses e desafios / Coordenado por Bernadete Angelina Gatti e Elba Siqueira de Sá Barreto.

INEP – Instituto Nacional de Educação e Pesquisa Educacional Anísio Teixeira Sinopses estatísticas da educação superior – graduação. Brasília: Inep, 2020. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/aceso-a-informacao/dados-abertos/sinopses-estatisticas>. Acesso em 12 agosto 2022

Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB. 9394/1996. BRASIL. Disponível em: <https://www.jusbrasil.com.br/topicos/11686325/artigo-62-da-lei-n-9394-de-20-de-dezembro-de-1996>. Acesso em 02 de dezembro de 2022.

NÓVOA, Antônio (1992). Formação de professores e profissão docente. In: NÓVOA, A. (org.) Os professores e a sua formação. Lisboa: Publicações Dom Quixote.

OLIVEIRA, R. M., & Delgado, A. R. (2020). A formação do licenciado em ciências biológicas: Um estudo sobre as disciplinas de ensino de biologia nas instituições de ensino superior em Fortaleza/CE. Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências, 20(3), 667-695.

SILVA, Clovis Pereira. A matemática no Brasil: história de seu desenvolvimento. 3. Ed. São Paulo: Blucher, 2003.